

MODÈLES ENTIERS DES COURBES HYPERELLIPTIQUES SUR UN CORPS DE VALUATION DISCRÈTE

QING LIU

ABSTRACT. Let C be a hyperelliptic curve of genus $g \geq 1$ over a discrete valuation field K . In this article we study the models of C over the ring of integers $\mathcal{O}_K$ of K . To each Weierstrass model (that is a projective model arising from a hyperelliptic equation of C with integral coefficients), one can associate a (valuation of) discriminant. Then we give a criterion for a Weierstrass model to have minimal discriminant. We show also that in the most cases, the minimal regular model of C over $\mathcal{O}_K$ dominates every minimal Weierstrass model. Some classical facts concerning Weierstrass models over $\mathcal{O}_K$ of elliptic curves are generalized to hyperelliptic curves, and some others are proved in this new setting.

Soit K un corps de valuation discrète, d'anneau de valuation $\mathcal{O}_K$. Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geq 1$ sur K (nous entendons par-là que C est propre lisse, et qu'il existe un morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ de degré 2). On étudie dans ce travail les modèles de C sur $\mathcal{O}_K$, c'est-à-dire des schémas normaux propres et plats sur $\mathcal{O}_K$, à fibres génériques isomorphes à C .

Plus précisément, on s'intéresse aux modèles de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. Ce sont des modèles provenant des équations hyperelliptiques de C à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ (déf. 6). On étudie aussi la relation entre les modèles de Weierstrass et le modèle régulier minimal de C sur $\mathcal{O}_K$.

Pour tout modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$, il y a une notion évidente du discriminant (§4.3). Le discriminant minimal de C est un invariant particulièrement important dans l'étude de l'arithmétique de C , comme en témoignent les travaux sur les courbes elliptiques. D'ailleurs, ce travail généralise certains résultats bien connus sur les modèles de Weierstrass entiers des courbes elliptiques.

Dans les trois premiers paragraphes, on rappelle la notion du discriminant et on définit les équations minimales et le discriminant minimal de C . On montre de façon tout à fait élémentaire que, sur un anneau principal, C admet une équation minimale globale (prop. 2).

La notion du discriminant est liée au choix d'une involution hyperelliptique σ sur C . Si $g \geq 2$, σ est unique. Par contre, si $g = 1$, cela n'est plus vrai. Dans §1, on étudie l'ensemble des classes de conjugaison (par les automorphismes intérieurs de $\text{Aut}_K(C)$) des involutions hyperelliptiques de C , et on donne une estimation de

Received by the editors August 22, 1995.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11G20, 14H25; Secondary 14G20.

Key words and phrases. Courbe hyperelliptique, modèle de Weierstrass, discriminant.

son cardinal (prop. 1). On verra plus tard que le discriminant minimal de C est indépendant du choix de σ si $C(K) \neq \emptyset$ ou si la caractéristique du corps résiduel k est différente de 2 (remarque 21).

Dans les paragraphes 4 à 6, on introduit la notion du modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. Pour tout point fermé p_0 d'un tel modèle W , on associe une multiplicité $\lambda(p_0) \in \mathbb{N}$ (déf. 10) qui mesure la singularité de p_0 dans W . Cette multiplicité est en général différente de la multiplicité de l'anneau local de W en p_0 et du nombre de Milnor en p_0 . Quelques résultats techniques préliminaires sur ces multiplicités sont démontrés.

Cette notion de multiplicité permet d'énoncer un critère pour qu'un modèle de Weierstrass W soit (de discriminant) minimal (§7, cor. 2). Dans le même paragraphe, on étudie le comportement du discriminant minimal de C vis-à-vis d'un changement de base $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ non-ramifiée (prop. 4).

À partir du paragraphe 8, on s'intéresse au modèle régulier minimal X de C sur $\mathcal{O}_K$. Pour tout modèle de Weierstrass minimal W de C sur $\mathcal{O}_K$, on donne un critère pour que X domine W , autrement dit que la désingularisation minimale de W soit isomorphe à X (prop. 5 et 6). On en déduit (cor. 4) que C n'admet qu'un nombre fini de modèles de Weierstrass minimaux (à involution hyperelliptique fixée si $g(C) = 1$).

Par une étude élémentaire du résultant, on déduit des relations entre le discriminant d'un modèle de Weierstrass W et les multiplicités des points fermés de W (prop. 7). Cela conduit aussi à une majoration des longueurs des chaînes de type A_n ou D_n dans la fibre spéciale X_k de X (lemme 13 et cor. 8). Une notion de facteurs locaux du discriminant permet d'améliorer ces majorations (cor. 7), mais malheureusement nous ne savons construire ces facteurs locaux que si $\text{car}(k) \neq 2$.

Enfin, on applique les résultats précédents au cas classique et bien connu des courbes elliptiques (§10). On montre que le modèle régulier minimal X domine le modèle de Weierstrass minimal de la courbe elliptique (remarque 20). Une preuve de ce fait sans recours à l'algorithme de Tate ne semblait pas être connue dans la littérature. Par l'étude de l'action de l'involution hyperelliptique sur X_k , on simplifie légèrement la preuve de l'algorithme de Tate ([Sil], IV.9) pour les types II^* , III^* et IV^* . Nous décrivons aussi tout l'algorithme de Tate en utilisant les multiplicités $\lambda(p_0)$, ce qui permet un traitement plus systématique et qui s'applique à un cadre plus général que les courbes de genre 1.

La notion du discriminant minimal adopté dans ce travail est une notion "naïve". Des considérations plus élaborées en utilisant le faisceau dualisant relatif sur le modèle régulier minimal sont plus adaptées dans d'autres contextes (voir [Uen], [Sai], [Liu2] ou plus récemment [Kau]). Cependant on peut déterminer explicitement la différence entre ces deux sortes de discriminants, au moins dans le cas du genre $g = 2$ ([Liu2], §6).

La motivation de départ de ce travail était de construire un algorithme "à la Tate" pour la détermination de la réduction des courbes de genre 2. Mais faute de temps d'une part, et faute de place d'autre part, cette question n'a pas été abordée ici excepté dans le cadre général des courbes hyperelliptiques. Cependant un tel algorithme existe pour $\text{car}(k) \neq 2$ ([Liu1]). Son implémentation sur $\mathbb{Z}[1/2]$ sous PARI (disponible par ftp sur le site : [megrez.math.u-bordeaux.fr /pub/liu](http://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/liu)) a été réalisée avec l'aide d'Henri Cohen. Je le remercie ici pour son dévouement et sa patience. Je remercie également Pascal Létard et Emmanuel Tollu qui m'ont fait bénéficier de leur connaissance de PARI.

1. EQUATIONS HYPERELLIPTIQUES

Dans ce paragraphe, K est un corps quelconque. On ne considère pas de valuation sur K .

1.1 Involutions et équations hyperelliptiques.

Lemme 1. *Soit A un corps ou un anneau principal. Soit B la clôture intégrale de $A[x]$ dans une extension séparable F de degré 2 sur $\text{Fr}(A[x])$. Alors on a les propriétés suivantes :*

- (a) *Le $A[x]$ -module B est libre et admet une base de la forme $\{1, y\}$.*
- (b) *Supposons que F est le corps de fonctions d'une courbe projective lisse de genre g sur $\text{Fr}(A)$. On peut choisir la base $\{1, y\}$ de sorte que si $y^2 + Q(x)y = P(x)$, alors $\deg Q(x) \leq g + 1$ et $\deg P(x) \leq 2g + 2$.*

Preuve. (a) Voir [Liu2], lemme 1.

(b) Soit $K = \text{Fr}(A)$. Il existe une base $\{1, z\}$ de $B \otimes K$ sur $K[x]$ avec $z^2 + R(x)z = S(x)$, $\deg R(x) \leq g + 1$ et $\deg S(x) \leq 2g + 2$. Quitte à multiplier z par un élément de K^* , on peut supposer que $R, S \in A[x]$. Donc il existe $a \in A \setminus \{0\}$, $T(x) \in A[x]$ tels que $z = ay + T(x)$. Si $a \in A^*$, alors $\{1, z\}$ est une base qui répond à la question. Supposons donc $a \notin A^*$. Soit $t \in A$ un élément irréductible divisant a . On peut écrire $T(x) = T_0(x) + tT_1(x)$ avec $T_i(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ et aucun des coefficients de $T_0(x)$ n'appartient à tA . Comme $T_0(x)^2 + Q(x)T_0(x) - P(x)$ est un multiple de t , on a $\deg T_0(x) \leq g + 1$. On peut donc remplacer z par $z_1 := (z - T_0(x))/t = (a/t)y + T_1(x)$. Si $a/t \in A^*$, c'est terminé, sinon on continue comme ci-dessus. Cela s'arrête au bout d'un nombre fini de fois. $\square$

Définition 1. On appellera *base standard* toute base $\{1, y\}$ satisfaisant les conditions du lemme 1 (b) ci-dessus.

Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geq 2$ sur K . Soit σ l'unique involution hyperelliptique sur C . Alors le corps $K(C)^{\langle \sigma \rangle}$ (des éléments invariants par σ) est l'unique sous- K -extension transcendante pure d'indice 2 de $K(C)$. Autrement dit, le morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ de degré 2 est unique à automorphismes de $\mathbb{P}_K^1$ près.

Si $g = 1$, on fixera dans toute la suite une *involution hyperelliptique* σ de $K(C)$, c'est-à-dire une involution de $K(C)$ telle que $K(C)^{\langle \sigma \rangle}$ soit une extension transcendante pure sur K .

Une *équation (hyperelliptique) de C* est la donnée d'un générateur x de $K(C)^{\langle \sigma \rangle}$ et d'un élément $y \in K(C)$ tel que $\{1, y\}$ soit une base standard de la clôture intégrale de $K[x]$ dans $K(C)$. On présente cette équation sous la forme

$$(\mathcal{E}) : \quad y^2 + Q(x)y = P(x)$$

où les polynômes $Q(x), P(x) \in K[x]$ sont les opposés respectivement de la trace de y et de la norme de y sur $K[x]$. Par hypothèse, $\deg Q \leq g + 1$ et $\deg P \leq 2g + 2$. Lorsque $\text{car}(K) \neq 2$, on choisit souvent y avec $Q(x) = 0$.

Étant donnée une équation hyperelliptique $(\mathcal{E})$ comme ci-dessus, on peut retrouver la courbe C comme recouvrement de deux ouverts affines

$$C = \text{Spec } K[x, y] \cup \text{Spec } K[v, z]$$

où les variables vérifient les relations $y^2 + Q(x)y = P(x)$, $z^2 + Q_1(v)z = P_1(v)$ où $Q_1(v) = v^{g+1}Q(1/v)$ et $P_1(v) = v^{2g+2}P(1/v)$. Les deux ouverts se recollent par les relations $xv = 1$, $zx^{g+1} = y$.

1.2 Les involutions hyperelliptiques d'une courbe de genre 1.

Supposons dans cette section que C est de genre 1. On étudie ici les classes de conjugaison des involutions hyperelliptiques sur C .

Notons E la jacobienne de C et $\text{Pic}_K^r(C) \subset H^1(C, \mathcal{O}_C^*)$ l'ensemble des diviseurs de degré r (définis sur K) de C modulo équivalence linéaire. Si D est un diviseur sur C , on note $[D]$ sa classe d'équivalence linéaire. On a une injection canonique $\text{Pic}_K^0(C) \rightarrow E(K)$ ([Mil1], Remark 1.6). Il est important ici de distinguer la courbe C et la variété abélienne E même lorsque C admet des points rationnels.

Soit σ une involution hyperelliptique sur C , soit $\pi : C \rightarrow C/\langle\sigma\rangle$ le morphisme canonique. Alors pour tout point rationnel ∞ de $C/\langle\sigma\rangle$, $D_\sigma := \pi^*\infty$ est un diviseur de degré 2 sur C , invariant par σ . L'image $[D_\sigma]$ de D_σ dans $\text{Pic}_K^2(C)$ ne dépend que de σ . Inversement, à tout diviseur effectif D de degré 2 sur C , on peut associer une involution hyperelliptique qui provient du revêtement $C \rightarrow \mathbb{P}(L(D)) = \mathbb{P}_K^1$, car $\dim_K L(D) = 2$. Cela établit une bijection entre l'ensemble des involutions hyperelliptiques de C et $\text{Pic}_K^2(C)$.

Pour tout $f \in \text{Aut}_K(C)$, $f\sigma f^{-1}$ est une involution hyperelliptique associée à $f(D_\sigma)$. Donc l'ensemble des classes de conjugaison des involutions hyperelliptiques est en bijection avec les orbites de $\text{Pic}_K^2(C)$ sous l'action de $\text{Aut}_K(C)$. Notons cet ensemble $\text{Aut}_K(C) \backslash \text{Pic}_K^2(C)$.

Proposition 1. *Soient C une courbe hyperelliptique de genre 1, E sa jacobienne et $\mathcal{H}$ l'ensemble des classes de conjugaison des involutions hyperelliptiques de C . On a les inégalités sur les cardinaux :*

$$|\text{Pic}_K^0(C)/2E(K)| \geq |\mathcal{H}| \geq \frac{2}{|\text{Aut}_K(E)|} |\text{Pic}_K^0(C)/2E(K)|$$

(les membres peuvent être infinis).

Preuve. Montrons d'abord qu'il existe une suite exacte de groupes

$$0 \rightarrow E(K) \rightarrow \text{Aut}_K(C) \xrightarrow{\iota} \text{Aut}_K(E).$$

Le groupe $\text{Aut}_K(C)$ opère naturellement sur $\text{Pic}_K^0(C)$, cela induit par fonctorialité un homomorphisme de groupes $\iota : \text{Aut}_K(C) \rightarrow \text{Aut}_K(E)$. D'autre part, tout point rationnel $a \in E(K)$ induit un élément $t_a \in \text{Aut}_K(C)$ défini de la façon suivante : sur la clôture algébrique $\bar{K}$ de K , pour tout point $\bar{p} \in C(\bar{K})$, $t_a(\bar{p})$ est l'unique point de $C(\bar{K})$ tel que $[t_a(\bar{p})] = [\bar{p}] + a$. Si $p \in C$, alors $t_a(p)$ est un point qui vérifie $[t_a(p)] = [p] + (\deg p)a$ (notons que $(\deg p)a \in \text{Pic}_K^0(C)$). Cela induit un homomorphisme de groupes $E(K) \rightarrow \text{Aut}_K(C)$ qui est injectif car il est injectif sur $\bar{K}$. De plus, il est clair que son image est contenue dans $\text{Ker}(\iota)$. Si $C(K) \neq \emptyset$, la suite ci-dessus est clairement exacte. Dans le cas général, on considère la suite exacte sur une clôture séparable K^s et on prend les invariants par $\text{Gal}(K^s/K)$.

Montrons maintenant les inégalités. On a vu plus haut que l'ensemble $\mathcal{H}$ est en bijection avec l'espace des orbites $\text{Aut}_K(C) \backslash \text{Pic}_K^2(C)$. Soient $X := E(K) \backslash \text{Pic}_K^2(C)$ et $G = \text{Im } \iota$, alors $\mathcal{H} \simeq G \backslash X$. Comme l'image par ι de toute involution hyperelliptique est l'automorphisme $(-1)_E$, celui-ci opère trivialement sur X . Donc on a

$$|X| \geq |\mathcal{H}| \geq \frac{2}{|\text{Aut}_K(E)|} |X|.$$

Fixons un diviseur D_0 de degré 2 sur C . Alors $a \mapsto [D_0] + a$ définit une application bijective $\text{Pic}_K^0(C)/2E(K) \rightarrow X$. Ce qui prouve le résultat. $\square$

Remarque 1. D'après cette proposition, l'ensemble $\mathcal{H}$ des classes de conjugaison des involutions hyperelliptiques sur C peut être infini en général, même dans le cas $C(K) \neq \emptyset$. Cependant, $E(K)/2E(K)$ (et donc $\mathcal{H}$) est fini si K est un corps de nombres (Mordell-Weil) ou un corps local (utiliser le groupe formel de E).

2. LE DISCRIMINANT D'UNE ÉQUATION HYPERELLIPTIQUE

Si $z^2 + T(u)z = S(u)$ est une autre équation de C , alors $K(u) = K(x)$. Donc il existe

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K), \quad e \in K^*, \quad H(u) \in K[u],$$

tels que

$$x = \frac{au + b}{cu + d}, \quad y = \frac{ez + H(u)}{(cu + d)^{g+1}}.$$

Le discriminant d'une équation hyperelliptique. Considérons deux polynômes à coefficients génériques

$$\mathcal{Q}(x) = u_{g+1}x^{g+1} + u_gx^g + \cdots + u_0 \in \mathbb{Z}[u_0, \dots, u_{g+1}][x],$$

$$\mathcal{P}(x) = v_{2g+2}x^{2g+2} + v_{2g+1}x^{2g+1} + \cdots + v_0 \in \mathbb{Z}[v_0, \dots, v_{2g+2}][x].$$

Soit

$$\Delta((u_i)_i, (v_j)_j) := 2^{-4(g+1)} \mathrm{disc}(4\mathcal{P}(x) + \mathcal{Q}(x)^2).$$

On peut montrer comme dans [Loc], Theorem 1.7, que $\Delta((u_i)_i, (v_j)_j) \in \mathbb{Z}[u_i, v_j]_{i,j}$. Soit

$$(\mathcal{E}) : \quad y^2 + (b_{g+1}x^{g+1} + b_gx^g + \cdots + b_0)y = a_{2g+2}x^{2g+2} + a_{2g+1}x^{2g+1} + \cdots + a_0$$

une équation de C . Alors on pose

$$\Delta(\mathcal{E}) := \Delta((b_i)_i, (a_j)_j).$$

Le fait que C soit lisse sur K se traduit par $\Delta(\mathcal{E}) \neq 0$.

Supposons $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Soit $(\mathcal{E}) : y^2 + Q(x)y = P(x)$ une équation hyperelliptique de C , avec $R(X) := 4P(X) + Q(X)^2$ de coefficient dominant c . Alors

$$\Delta(\mathcal{E}) = \begin{cases} 2^{-4(g+1)} \mathrm{disc}(R(x)) & \text{si } \deg R(x) = 2g + 2, \\ 2^{-4(g+1)} c^2 \mathrm{disc}(R(x)) & \text{si } \deg R(x) = 2g + 1. \end{cases}$$

Soient $y^2 + Q(x)y = P(x)$, $z^2 + T(u)z = S(u)$ deux équations de C sur K . Soit Δ le discriminant de la première équation et Δ' celui de la seconde. Posons $n = 2g + 2$. On sait que le discriminant est un invariant projectif de degré $2n - 2$ et d'indice $n(n - 1)$. Donc avec les notations du début du paragraphe, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \Delta e^{-4(n-1)} (ad - bc)^{n(n-1)} \\ &= \Delta e^{-4(2g+1)} (ad - bc)^{2(g+1)(2g+1)}. \end{aligned}$$

3. EQUATIONS ENTIÈRES ET ÉQUATIONS MINIMALES

Fixons quelques hypothèses et notations pour la suite. Soient

- K un corps de valuation discrète, d'uniformisante t ,
- $\mathcal{O}_K$ son anneau de valuation,
- $\nu : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation normalisée de K ,
- k son corps résiduel. On supposera k *parfait* pour simplifier.
- On note $\tilde{a}$ l'image de a dans k pour tout $a \in \mathcal{O}_K$.

La valuation ν s'étend en une valuation, notée encore par ν , sur l'anneau de polynômes $\mathcal{O}_K[x]$ en posant $\nu(\sum_i a_i x^i) = \min_i \{\nu(a_i)\}$. Pour tout élément $P(x) = \sum_i a_i x^i \in \mathcal{O}_K[x]$, on note $\tilde{P}(x) = \sum_i \tilde{a}_i x^i$ son image dans $k[x]$.

Lemme 2. *Soient $P(x), Q(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $B = \mathcal{O}_K[x, y]/(y^2 + Q(x)y - P(x))$. Supposons que $B \otimes K$ est normal. Les propriétés suivantes sont vraies.*

- (a) *Si $B \otimes k$ est réduite, alors B est normal.*
- (b) *L'algèbre $B \otimes k$ n'est pas réduite si et seulement si $4\tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x)^2 = 0$ et si $-\tilde{P}(x)$ est un carré dans $k[x]$.*
- (c) *Supposons $B \otimes k$ non réduite. Alors B est normal si et seulement s'il existe $R(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ tel que $\nu(P(x) + Q(x)R(x) - R(x)^2) = 1$.*
- (d) *Si $\text{car}(k) \neq 2$, alors B est normal si et seulement si $\nu(4P(x) + Q(x)^2) \leq 1$.*

Preuve. (a) C'est élémentaire.

(b) Supposons que le nilradical I de $B \otimes k$ soit non trivial. Comme $B \otimes k$ est libre de rang 2 sur $k[x]$, I est libre de rang 1. Il est aisé de voir alors que l'homomorphisme canonique $k[x] \rightarrow (B \otimes k)/I$ est un isomorphisme. Donc il existe $\tilde{R}(x) \in k[x]$ tel que $z := y + \tilde{R}(x) \in I$. On a $I = zk[x] = z(B \otimes k)$, donc $z^2 = 0$. Ce qui équivaut à $4\tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x)^2 = 0$ et que $-\tilde{P}(x)$ est un carré dans $k[x]$. La réciproque est immédiate.

(c) Soit $R(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ tel que $\tilde{P}(x) + \tilde{R}(x)^2 = 0$. En choisissant convenablement le signe de $R(x)$, on a $\tilde{Q}(x) = 2\tilde{R}(x)$. Quitte à remplacer y par $y + R(x)$, on peut supposer que $\tilde{Q}(x) = \tilde{P}(x) = 0$. Si $\nu(P) \geq 2$, alors B n'est pas normal car y/t est entier sur B . Inversement, supposons $\nu(P) = 1$. Soit $\{1, w\}$ une base sur $\mathcal{O}_K[x]$ de la clôture intégrale de B (voir lemme 1). On a $y = aw + T(x)$ avec $a \in \mathcal{O}_K$ et $T(x) \in \mathcal{O}_K[x]$. En reportant cette relation dans l'équation de y sur $\mathcal{O}_K[x]$, on voit que $a \in \mathcal{O}_K^*$, donc $w \in B$ et B est normal.

(d) On peut supposer $Q = 0$. L'assertion découle alors des résultats précédents. $\square$

Remarque 2. La preuve du lemme ci-dessus contient aussi le procédé de normalisation de $B = \mathcal{O}_K[x, y]/(y^2 + Q(x)y - P(x))$.

Si $\text{car}(k) \neq 2$, on se ramène d'abord à $Q(x) = 0$ en remplaçant y par $y + Q/2$. Soit $c = \nu(P)$, alors la normalisation de B s'obtient en remplaçant y par $y/t^{[c/2]}$.

Supposons maintenant $\text{car}(k) = 2$. On peut supposer $\tilde{Q}(x) = 0$ et qu'il existe $R(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ tel que $\tilde{P}(x) + \tilde{R}(x)^2 = 0$ (sinon B est normal). Cela revient à dire que $\tilde{Q}(x) = 0$ et $\tilde{P}(x) \in k[x^2]$. Si $P(x) = \sum a_i x^i$, on peut prendre $R(x) = \sum b_i x^i$ où $b_i \in \mathcal{O}_K$ est tel que $\tilde{b}_i^2 + \tilde{a}_{2i} = 0$. Si $\nu(P + RQ - R^2) = 1$, on a fini. Sinon, on remplace y par $(y + R)/t$, et on recommence. Ce procédé s'arrête au bout d'un nombre fini de fois car la valuation du discriminant diminue strictement chaque fois.

Remarque 3. Soient $K(x) = K(C)^{(\sigma)}$ et B la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x]$ dans $K(C)$. On voit dans la preuve du lemme ci-dessus que si $B \otimes k$ n'est pas réduite, alors B admet une base standard $\{1, y\}$ telle que $\tilde{Q}(x) = \tilde{P}(x) = 0$.

Définition 2. Une *équation entière* de C est une équation hyperelliptique

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

de C telle que $\{1, y\}$ soit une base standard de la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x]$ dans $K(C)$.

Notons que cette propriété est plus forte que de supposer simplement $Q(x), P(x)$ à coefficients dans $\mathcal{O}_K$.

Remarque 4. Soit $(\mathcal{E}) : z^2 + Q_1(x)z = P_1(x)$ une équation de C à coefficients dans $\mathcal{O}_K$, soit $(\mathcal{E}_1) : y^2 + Q(x)y = P(x)$ une équation entière de C avec la même variable x . Alors $\nu(\Delta(\mathcal{E}_1)) \leq \nu(\Delta(\mathcal{E}))$. Cela résulte du fait que $z \in y\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_K[x]$.

Définition 3. Une équation entière $(\mathcal{E})$ de C sera dite *minimale* si $\nu(\Delta(\mathcal{E}))$ est minimal parmi toutes les équations entières de C . L'entier $\nu(\Delta(\mathcal{E}))$ est alors appelé *discriminant minimal* de C (sur $\mathcal{O}_K$), on le notera $\nu(C)$.

Lorsque $g = 1$, ces notions sont relatives au choix d'une involution hyperelliptique σ . Elles sont équivalentes pour des involutions hyperelliptiques de la même classe de conjugaison (au sens de §1.2). Voir aussi la remarque 21.

On dit que C a *bonne réduction* si $\nu(C) = 0$. Cela équivaut à dire que C est la fibre générique d'un schéma propre lisse sur $\mathcal{O}_K$.

Remarque 5. Une équation minimale existe toujours, mais elle n'est pas unique en général, même modulo l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_K)$. On peut considérer l'exemple qui suit.

Supposons $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$. Soit C la courbe de genre 2 définie par une équation $y^2 = (x^3 + a)(x^3 + t^6)$, $a \in \mathcal{O}_K^*$. C'est une équation minimale, dont la valuation du discriminant vaut 12. Le changement de variables $x = t^2/u$, $y = t^3z/u^3$ donne $z^2 = (u^3 + 1)(au^3 + t^6)$. C'est une autre équation minimale. En fait ces deux équations définissent deux modèles de Weierstrass non isomorphes (§4).

Lemme 3. Soit A un sous-anneau de $\mathcal{O}_K$ contenant t et tel que $A/tA \simeq \mathcal{O}_K/t\mathcal{O}_K$. Soit $y^2 + Q(x)y = P(x)$ une équation de C à coefficients dans $\mathrm{Fr}(A)$. Alors il existe un changement de variables $x = au + b$, $y = cz + R(u)$ avec $a, c \in t^{\mathbb{Z}}$, $b \in A[1/t]$ et $R(u) \in A[1/t][u]$ tel que la nouvelle équation $z^2 + Q_1(u)z = P_1(u)$ soit minimale.

Preuve. (1) Montrons d'abord le résultat avec $a, b, c \in K$ et $R(u) \in K[u]$. Il existe un changement de variables $x = (\alpha u + \beta)/(\gamma u + \delta)$, $y = (\epsilon z + H(u))/(\gamma u + \delta)^{g+1}$, qui donne une équation en u, z qui est minimale. Si $\gamma = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit $\eta = -\delta/\gamma$. On compose avec le changement de variables $u = (\eta w - 1)/w$, $z = v/w^{g+1}$ ou $u = w/(\eta^{-1}w + 1)$, $z = v/(\eta^{-1}w + 1)^{g+1}$ suivant que $\nu(\eta) \geq 0$ ou < 0 . Cela donne alors le résultat. En effet, il est clair que l'équation en w, v est à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ et a le même discriminant que l'équation en u, z .

(2) Montrons le lemme. Soit $x = a_1u_1 + b_1$, $y = c_1z_1 + R_1(u_1)$ un changement de variables dans K qui donne une équation minimale. Comme $A[1/t]$ est dense dans K , on peut écrire $b_1 = b + b_2$, avec $b \in A[1/t]$ et $\nu(b_2) > N := \nu(a_1)$. Posons $u = (t^{-N}a_1)u_1 + t^{-N}b_2$. Alors $x = au + b$ avec $a = t^N$. On a $R_1(u_1) = R_2(u) \in K[u]$. En approximant de la même façon $R_2(u)$ par un élément $R(u) \in A[1/t][u]$, on peut

écrire $y = cz + R(u)$ avec $c = t^{\nu(c_1)}$. Il est clair que l'équation en u, z ainsi obtenue est à coefficients dans A , de discriminant minimal. $\square$

Proposition 2. *Soit A un anneau de Dedekind. Soient C une courbe hyperelliptique sur $\text{Fr}(A)$ et $y^2 + Q(x)y = P(x)$ une équation de C sur $\text{Fr}(A)$, de discriminant Δ . Supposons que tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A tel que $\nu_{\mathfrak{p}}(\Delta) \neq 0$ soit principal. Alors il existe une équation hyperelliptique de C à coefficients dans A qui soit minimal dans $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A .*

Preuve. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ les idéaux maximaux de A tels que $\nu_{\mathfrak{p}_i}(\Delta) \neq 0$. En appliquant successivement un changement de variables comme dans le lemme 3 à $\mathcal{O}_K = A_{\mathfrak{p}_1}, \dots, A_{\mathfrak{p}_n}$, on obtient le résultat. En effet un tel changement de variables en une place $\mathfrak{p}_i$ ne modifie pas la nature de l'équation en toute place distincte de $\mathfrak{p}_i$. $\square$

Corollaire 1. *Soit A un anneau principal. Soit C une courbe hyperelliptique sur $\text{Fr}(A)$ ayant bonne réduction en toute place finie de A . Alors C admet une équation $(\mathcal{E})$ à coefficients dans A et de discriminant $\Delta(\mathcal{E})$ inversible.*

Remarque 6. Sur un anneau de Dedekind A , on peut définir deux idéaux de A associés à C ayant la propriété qu'ils sont tous deux principaux si et seulement s'il existe une équation minimale globale sur A .

4. MODÈLES DE WEIERSTRASS

4.1 Modèles propres normaux.

Définition 4. Soit E une courbe propre lisse et géométriquement connexe sur K . Un modèle de E sur $\mathcal{O}_K$ est un schéma normal X , propre et plat sur $\mathcal{O}_K$, muni d'un isomorphisme $\phi_X : X_K \rightarrow E$ sur K . Deux modèles X, Y sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_K$ -schéma $X \rightarrow Y$ compatible avec l'isomorphisme $\phi_Y^{-1} \circ \phi_X$. Dans la suite, l'isomorphisme ϕ_X sera généralement omis dans les notations.

Le fait suivant (une conséquence immédiate du "Zariski's Main Theorem") est important pour les modèles normaux, il sera souvent utilisé implicitement.

Soient X, Y deux modèles de C sur $\mathcal{O}_K$. On suppose qu'il existe une application rationnelle $f : X \dashrightarrow Y$ telle que f et f^{-1} soient définies en tous les points de codimension 1, alors f est un isomorphisme.

Autrement dit, un modèle X est complètement déterminé par les anneaux locaux de X aux points générique de la fibre spéciale X_k .

4.2 Modèles de $\mathbb{P}_K^1$.

Soit x un générateur de $K(\mathbb{P}_K^1)$ sur K . Notons $\mathbb{P}_x^1$ le $\mathcal{O}_K$ -schéma

$$\mathbb{P}_x^1 := \text{Spec } \mathcal{O}_K[x] \cup \text{Spec } \mathcal{O}_K[1/x].$$

Alors $\mathbb{P}_x^1 \simeq \mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^1$ et c'est un modèle de $\mathbb{P}_K^1$ sur $\mathcal{O}_K$. Inversement, tout modèle de $\mathbb{P}_K^1$ lisse sur $\mathcal{O}_K$ s'obtient de cette façon. Deux modèles $\mathbb{P}_x^1, \mathbb{P}_u^1$ sont isomorphes si et seulement s'il existe

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_K)$$

tel que $x = (au + b)/(cu + d)$.

Plus généralement, soient $Z_1 = \mathbb{P}_x^1$, $Z_2 = \mathbb{P}_u^1$ deux modèles lisses de $\mathbb{P}_K^1$. Quitte à remplacer x et u par des conjugués (sous l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_K)$) convenables, on peut supposer que $x = t^d u$. L'entier $d(Z_1, Z_2) := |d|$ ne dépend que des modèles Z_1, Z_2 .

Définition 5. Soient Z_1, Z_2 deux modèles lisses de $\mathbb{P}_K^1$. On appelle *distance entre* Z_1, Z_2 l'entier $d(Z_1, Z_2)$ ci-dessus. Cela définit une métrique sur l'ensemble des classes d'isomorphismes des modèles lisses de $\mathbb{P}_K^1$ sur $\mathcal{O}_K$.

Si $r := d(Z_1, Z_2) > 0$, on peut écrire $Z_1 = \mathbb{P}_x^1$, $Z_2 = \mathbb{P}_u^1$ avec $x = t^r u$. On appellera *l'intersection de* Z_1, Z_2 et la note $Z_1 \wedge Z_2$ l'ensemble des deux points $\{x = t = 0\} \in Z_1$, $\{1/u = t = 0\} \in Z_2$.

Soit Y un modèle quelconque de $\mathbb{P}_K^1$, soit Θ une composante irréductible de Y_k de multiplicité 1. Alors il existe un unique modèle lisse Z et un morphisme $\phi : Y \rightarrow Z$ de modèles tel que $\phi(\Theta')$ soit réduit à un point pour toute composante irréductible Θ' de Y_k distinctes de Θ , et que $\phi|_{\Theta} : \Theta \rightarrow Z_k$ soit birationnel.

4.3 Modèles de Weierstrass d'une courbe hyperelliptique.

Définition 6. Soit σ l'involution hyperelliptique fixe de C . Un *modèle de Weierstrass de* C (sur $\mathcal{O}_K$) est un modèle W de C sur $\mathcal{O}_K$ tel que σ opère sur W et que $W/\langle\sigma\rangle$ soit lisse sur $\mathcal{O}_K$.

Soit x un générateur de $K(C)^{\langle\sigma\rangle}$ sur K . Soit W la normalisation de $\mathbb{P}_x^1$ dans C . Alors W est un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. On dira que W est le *modèle de Weierstrass de* C *associé à* x . Tout modèle de Weierstrass de C est obtenu de cette manière à isomorphisme près. Ainsi l'ensemble des classes d'isomorphisme des modèles de Weierstrass de C s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphisme des modèles lisses de $C/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}_K^1$. Enfin ce dernier s'identifie (non canoniquement) à $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_K) \backslash \mathrm{PGL}_2(K)$.

Soient W_1, W_2 deux modèles de Weierstrass C associés respectivement à x et u . Alors W_1, W_2 sont deux modèles isomorphes s'il et seulement si $\mathbb{P}_x^1 \simeq \mathbb{P}_u^1$ en tant que modèles de $\mathbb{P}_K^1$, c'est-à-dire que u est dans l'orbite de x sous l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_K)$.

Définition 7. Soient W_1, W_2 deux modèles de Weierstrass de C , $Z_i = W_i/\langle\sigma\rangle$. On note $d(W_1, W_2)$ la distance $d(Z_1, Z_2)$, et $W_1 \wedge W_2$ l'image réciproque de $Z_1 \wedge Z_2$ dans la réunion disjointe $W_1 \amalg W_2$ si $W_1 \not\simeq W_2$ (voir déf. 5).

Soit B la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x]$ dans $K(C)$, soit $\{1, y\}$ une base standard de B sur $\mathcal{O}_K[x]$ (voir §1). Cela correspond donc à une équation entière $(\mathcal{E}) : y^2 + Q(x)y = P(x)$ de C . Notons $\nu(\Delta_W) := \nu(\Delta(\mathcal{E}))$. C'est un entier indépendant du choix de x . En effet, si u donne le même modèle de Weierstrass, on a $x = (au + b)/(cu + d)$ comme ci-dessus, et $\{1, y/(cu + d)^{g+1}\}$ est une base de la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[u]$ dans $K(C)$.

Définition 8. Un *modèle de Weierstrass minimal de* C (sur $\mathcal{O}_K$) est un modèle de Weierstrass de C tel que $\nu(\Delta_W)$ soit minimal parmi tous les modèles de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. Notons que W est lisse sur $\mathcal{O}_K$ si et seulement si $\nu(\Delta_W) = 0$.

Remarque 7. Supposons que C contient un point de Weierstrass P_0 rationnel sur K . Lockhart [Loc] a étudié le discriminant minimal de la courbe pointée (C, P_0) .

Il s'agit du plus petit discriminant des modèles de Weierstrass W de C sur $\mathcal{O}_K$ tels que la spécialisation de P_0 dans W_k soit lisse sur k (voir déf. 14). Le discriminant minimal que nous étudions ici est naturellement (et parfois strictement) plus petit.

5. POINTS SINGULIERS D'UN MODÈLE DE WEIERSTRASS

Soit W un modèle de Weierstrass de C . On s'intéresse aux points singuliers du schéma W . Comme $W_K = C$, les points singuliers de W se trouvent tous dans la fibre spéciale W_k . De plus, ils sont en nombre fini car W est normal et de dimension 2.

Lemme 4. *Soit A un anneau local noethérien régulier, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $f \in \mathfrak{m}$ non nul. Alors A/fA est régulier si et seulement si $f \notin \mathfrak{m}^2$.*

Preuve. Soit $\mathfrak{m}_f = \mathfrak{m}/fA$ l'idéal maximal de A/fA . Soit k le corps résiduel de A (et donc de A/fA). On a une suite exacte canonique de k -espaces vectoriels

$$0 \rightarrow (\mathfrak{m}^2 + fA)/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{m}_f/\mathfrak{m}_f^2 \rightarrow 0.$$

Comme $\dim A/fA = \dim A - 1$, A/fA est régulier si et seulement si $(\mathfrak{m}^2 + fA)/\mathfrak{m}^2 \neq 0$, c'est-à-dire que $f \notin \mathfrak{m}^2$. $\square$

Notations. Fixons quelques notations pour la suite. Soit p_0 un point fermé de W_k . Soit $q_0 \in W/\langle \sigma \rangle$ l'image de p_0 . Fixons $x \in K(C)^{\langle \sigma \rangle}$ tel que $W/\langle \sigma \rangle = \mathbb{P}_x^1$ (voir §4) et que $q_0 \in \text{Spec } \mathcal{O}_K[x]$. On note $\mathfrak{m}_{q_0}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K[x]$ correspondant au point q_0 et B la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x]$ dans $K(C)$. Pour toute base $\{1, y\}$ de B sur $\mathcal{O}_K[x]$, on note $Q(x) = -\text{Tr}(y)$, $P(x) = -\text{Norm}(y)$ (voir §1). On note aussi parfois $S_0(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ un polynôme unitaire tel que $m_{q_0} = (t, S_0(x))$.

Lemme 5. *Avec les notations ci-dessus, on a les propriétés suivantes :*

(a) *Soit $\{1, y\}$ une base de B . Si le polynôme*

$$s(x) := \text{pgcd}\{4\tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x)^2, \tilde{P}'(x)^2 + \tilde{Q}(x)\tilde{Q}'(x)\tilde{P}'(x) - \tilde{P}(x)\tilde{Q}'(x)^2\}$$

n'appartient pas à m_{q_0} , alors p_0 est régulier dans W_k et dans W .

(b) *Supposons $s(x) \in \mathfrak{m}_{q_0}$. Alors il existe une base standard $\{1, y\}$ de B telle que $Q(x), P(x) \in \mathfrak{m}_{q_0}$.*

(c) *Sous les hypothèses de (b), on a p_0 régulier dans W si et seulement si $P(x) \notin \mathfrak{m}_{q_0}^2$.*

Preuve. (a) On détermine les points réguliers de $\text{Spec } B \otimes k$ à l'aide du critère jacobien. Comme W_k est un diviseur de Cartier dans W , tout point régulier dans W_k est régulier dans W .

(b) On peut supposer $\text{car}(k) = 2$, le cas contraire étant trivial (il suffit de prendre y avec $Q(x) = 0$). Soit $\{1, y\}$ une base standard. Soit $s_0(x) \in k[x]$ un polynôme unitaire qui engendre l'idéal $\mathfrak{m}_{q_0} \otimes k$ de $k[x]$. Par hypothèse, $s_0(x)$ divise $\tilde{Q}$. Donc si $\tilde{Q} \neq 0$, alors $\deg s_0(x) \leq \deg \tilde{Q}(x) \leq g + 1$. Si $\tilde{Q}(x) = 0$, alors $s_0(x)$ divise $\tilde{P}'(x)$, donc $\deg s_0(x) < \deg \tilde{P}(x)/2 \leq g + 1$. Il existe donc $\tilde{H} \in k[x]$ tel que $\tilde{P} + \tilde{H}^2 \in s_0(x)k[x]$ (on utilise le fait que $k[x]/(s_0(x))$ est un corps parfait) et que $\deg \tilde{H}(x) \leq g$. On relève $\tilde{H}$ en $H(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ de même degré. Après le changement de variables $y = z - H(x)$, on peut supposer que $s_0(x) \mid \tilde{Q}(x)$ et $s_0(x) \mid \tilde{P}(x)$. Autrement dit, $Q(x), P(x) \in \mathfrak{m}_{q_0}$.

(c) Supposons maintenant que y est choisi de cette manière. Soit $\mathfrak{m}_{p_0}$ l'idéal maximal de B correspondant à p_0 . Considérons l'anneau de polynômes $\mathcal{O}_K[x, Y]$,

$\mathfrak{m}$ l'idéal maximal $(\mathfrak{m}_{q_0}, Y)$ et $f = Y^2 + Q(x)Y - P(x) \in \mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}/(f)$ et $f + P(x) \in \mathfrak{m}^2$. Il suit du lemme 4 (appliqué à $A = \mathcal{O}_K[X, Y]_{\mathfrak{m}}$) que p_0 est un point régulier de $\text{Spec } B$ si et seulement si $P(x) \notin \mathfrak{m}^2$, ce qui équivaut à $P(x) \notin \mathfrak{m}_{q_0}^2$. $\square$

En résumé : Supposons W_k réduit. Les points singuliers de $\text{Spec } B$ sont à chercher parmi les points au-dessus de l'ensemble des zéro $V(s(x)) \subset \text{Spec } k[x]$.

Si W_k n'est pas réduit, on se ramène d'abord à $\tilde{P} = \tilde{Q} = 0$ (voir remarque 3). Soit $P_1(x) = P(x)/t \in \mathcal{O}_K[x]$. Les points singuliers de $\text{Spec } B$ sont exactement ceux qui sont au-dessus de $V(\tilde{P}_1(x))$.

6. MULTIPLICITÉS DES POINTS FERMÉS D'UN MODÈLE DE WEIERSTRASS

Dans tout ce paragraphe, on fixe un modèle de Weierstrass W de C sur $\mathcal{O}_K$. Pour tout point fermé $p_0 \in W_k$, on choisit arbitrairement un élément x tel que $W/\langle \sigma \rangle = \mathbb{P}_x^1$ et que l'image q_0 de p_0 dans $W/\langle \sigma \rangle$ appartienne à $\text{Spec } \mathcal{O}_K[x]$. On note B la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x]$ dans $K(C)$. On utilisera librement d'autres notations introduites au §5. On va définir des entiers $\lambda_r(p_0)$ relatif au point p_0 qui mesure d'une certaine manière la singularité de W en p_0 .

6.1 Multiplicité dans la fibre spéciale.

Pour tout $h(x) \in k[x]$, posons $\delta(p_0, h(x)) :=$ l'exposant de $\mathfrak{m}_{q_0}$ dans $h(x)$. Par convention, $\delta(p_0, 0) = +\infty$. Soit $\{1, y\}$ une base (non nécessairement standard) de B sur $\mathcal{O}_K[x]$. Si W_k est réduit, on pose

$$\delta(p_0, y) = \min\{2\delta(p_0, \tilde{Q}(x)), \delta(p_0, \tilde{P}(x))\}.$$

Dans le cas contraire, on prend y tel que $Q(x), P(x) \in t\mathcal{O}_K[x]$ (voir la remarque 3), et on pose

$$\delta(p_0, y) = \delta(p_0, \tilde{P}_1(x))$$

où $P_1(x) = P(x)/t \in \mathcal{O}_K[x]$. Il est à noter que $\delta(p_0, y)$ ne dépend pas du choix de y dans ce cas-là.

Définition 9. Soit $p_0 \in W_k$. Si W_k est réduit, on note $\delta(p_0)$ le maximum des $\delta(p_0, y)$ pour les bases (non nécessairement standard) $\{1, y\}$ de B sur $\mathcal{O}_K[x]$. Sinon, on pose $\delta(p_0) = \delta(p_0, y)$ pour une base standard $\{1, y\}$ telle que $\tilde{Q}(x) = \tilde{P}(x) = 0$.

Supposons $\text{car}(k) \neq 2$, alors $\delta(p_0) = \delta(p_0, y)$ si $Q(x) = 0$.

Lemme 6. Soient W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$, $p_0 \in W_k$ un point fermé.

- (a) Supposons W_k réduit. On a l'équivalence : p_0 lisse sur $k \iff \delta(p_0) \leq 1$.
- (b) Supposons W_k réduit. Soit $\pi : \tilde{W}_k \rightarrow W_k$ la normalisation de W_k . Si $\delta(p_0) \geq 2$ est pair, alors $(\tilde{W}_k)_{p_0} \rightarrow \text{Spec } k(p_0)$ est séparable de degré 2. Si $\delta(p_0)$ est impair, π est un homéomorphisme topologique au-dessus de p_0 . Enfin

$$\dim_k(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{W}_k})_{p_0} / \mathcal{O}_{W_k, p_0} = [\delta(p_0)/2].$$

- (c) Si W_k n'est pas réduit, ou si $\text{car}(k) \neq 2$, alors

$$\sum_{p \in W_k} [k(p) : k] \delta(p) = 2g + 2.$$

(d) Si $W_k \rightarrow (W/\langle \sigma \rangle)_k$ est séparable, alors

$$\sum_{p \in W_k} [k(p) : k] \delta(p) \leq 2g + 2.$$

(e) Dans le cas autre que (c) et (d), on a

$$\sum_{p \in W_k} [k(p) : k] (\delta(p) - 1) = 2g.$$

(f) Soit $p_1 \neq p_0$ un point de W_k , alors $\delta(p_0) + \delta(p_1) \leq 2g + 2$.

Preuve. Soient $s_0(x)$ un générateur de $\mathfrak{m}_{q_0}$, y tel que $\delta(p_0, y) = \delta(p_0)$, et $l = [\delta(p_0)/2]$ la partie entière de $\delta(p_0)/2$.

(a) Si $\delta(p_0) \geq 2$, alors $y/s_0(x)^l$ est entier sur $B \otimes k$ mais $y/s_0(x)^l \notin B \otimes k$. Il suit que p_0 n'est pas normal dans W_k , il n'est donc pas lisse sur k . Si $\delta(p_0) \leq 1$, W_k est clairement lisse en p_0 .

(b) Considérons $D = k[x, y/s_0(x)^l]$. Il résulte de (a) que $\text{Spec } D \rightarrow \text{Spec}(B \otimes k)$ est la normalisation aux points p_0 et $\sigma(p_0)$. De plus, pour tout point $p'_0 \in \text{Spec } D$ au-dessus de p_0 , sa multiplicité $\delta(p'_0)$ calculée dans D vérifie $\delta(p'_0) = \delta(p_0) - 2l$. On en déduit aisément le résultat.

(c)-(d) Supposons d'abord que W_k n'est pas réduit. Soit $\{1, y\}$ une base standard telle que $\tilde{Q}(x) = \tilde{P}(x) = 0$. Alors pour tout point $p \in \text{Spec}(B \otimes k)$, on a $\delta(p, y) = \delta(p, \tilde{P}_1(x))$ où $P_1(x) = P(x)/t \in \mathcal{O}_K[x]$. Donc

$$\sum_{p \in \text{Spec}(B \otimes k)} [k(p) : k] \delta(p) = \deg \tilde{P}_1(x).$$

Or au-dessus de $x = \infty$, cette somme vaut $(2g + 2) - \deg \tilde{P}_1(x)$, d'où l'égalité souhaitée.

Supposons maintenant W_k réduit. Si $\text{car}(k) \neq 2$, on montre qu'il y a égalité exactement comme ci-dessus en prenant $Q = 0$. Supposons désormais $\text{car}(k) = 2$. Si $\tilde{Q}(x) \neq 0$ ($W_k \rightarrow (W/\langle \sigma \rangle)_k$ est alors séparable), alors $\delta(p) = \delta(p, y) = 2\delta(p, \tilde{Q}(x))$ pour tout $p \in \text{Spec } B \otimes k$. On conclut comme ci-dessus.

(e) On a $\text{car}(k) = 2$, W_k réduit et $\tilde{Q}(x) = 0$ pour toute base $\{1, y\}$ de B . Pour tout $p \in \text{Spec}(B \otimes k)$, on a $\delta(p) - 1 = \delta(p_0, \tilde{P}'(x))$ où $P'(x)$ est la dérivée de $P(x)$. L'égalité s'obtient comme dans le cas W_k non réduit.

(f) résulte immédiatement de (c)-(e). $\square$

Remarque 8. Si W_k est réduit et si $p_0 \in W_k$ est singulier, alors p_0 est une singularité de type A_n avec $n = \delta(p_0) - 1$.

Calcul effectif de $\delta(p_0)$.

Si W_k n'est pas réduit, $\delta(p_0)$ se calcule avec une base standard quelconque $\{1, y\}$ de B telle que $\tilde{Q}(x) = \tilde{P}(x) = 0$. Si W_k est réduit mais $\text{car}(k) \neq 2$, alors $\delta(p_0) = \delta(p_0, 4\tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x)^2)$ pour une base $\{1, y\}$ quelconque de B .

Supposons maintenant W_k réduit et $\text{car}(k) = 2$. Si $2\delta(p_0, \tilde{Q}(x)) \leq \delta(p_0, \tilde{P}(x))$ ou si $\delta(p_0, \tilde{P}(x))$ est impair, alors $\delta(p_0) = \delta(p_0, y)$. Sinon, soit $s_0(x)$ un générateur de $\mathfrak{m}_{q_0}$, et écrivons $\tilde{P}(x) = \sum_{i \geq 2n} c_i(x) s_0(x)^i$ dans la base $s_0(x)$ -adique. Soit $\delta(p_0, \tilde{P}(x)) = 2n$. Il existe $R(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ tel que $\tilde{R}(x)^2 - c_{2n}(x) \in s_0(x)k[x]$. Posons $y_1 = y + R(x)s_0(x)^n$. Alors $\{1, y_1\}$ est encore une base, et on a $\delta(p_0, y_1) > \delta(p_0, y)$. On continue le raisonnement ci-dessus avec y_1 . Au bout d'un nombre fini de pas, on trouve une base qui donne $\delta(p_0)$.

On voit de cette manière que si p_0 est rationnel (ou même quadratique) sur k , alors $\delta(p_0)$ est atteinte pour une base standard $\{1, y\}$. Cela est faux en général.

6.2 Multiplicités dans W .

Soit $r \geq 1$ un entier. Soit $S_0(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ unitaire dont l'image dans $k[x]$ engendre $\mathfrak{m}_{p_0}$. Considérons l'anneau $\mathcal{O}_K[x, v]$ avec $S_0(x)^r v = t$. Pour tout $H(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, on note $\lambda(p_0, H)$ le plus grand entier n tel que $H(x) \in S_0(x)^n \mathcal{O}_K[x, v]$. Par convention, $\lambda_r(p_0, 0) = +\infty$. Le nombre $\lambda_r(p_0, H)$ est aussi le plus grand entier n tel que $H(x) \in (t, S_0(x)^r)^n \mathcal{O}_K[x]$, il est donc indépendant du choix de $S_0(x)$. On peut le déterminer de la façon suivante : soit

$$H(x) = \sum_{i \geq 0} c_i(x) S_0(x)^i, \quad c_i(x) \in \mathcal{O}_K[x], \quad \deg c_i(x) < \deg S_0(x)$$

l'écriture de $H(x)$ dans la base $S_0(x)$ -adique. Alors

$$\lambda_r(p_0, H) = \min \{ i + r\nu(c_i) \mid i \geq 0 \}.$$

Pour toute base $\{1, y\}$ de B sur $\mathcal{O}_K[x]$, on note

$$\lambda_r(p_0, y) = \min \{ 2\lambda_r(p_0, Q), \lambda_r(p_0, P) \}.$$

Définition 10. Soit $r \geq 1$, soit $p_0 \in W_k$. La multiplicité $\lambda_r(p_0)$ du point p_0 dans W est le maximum des $\lambda_r(p_0, y)$ pour toutes les bases $\{1, y\}$ de B sur $\mathcal{O}_K[x]$. On verra (§6.3) que $\lambda_r(p_0)$ ne dépend pas du choix du générateur x .

On note pour simplifier $\lambda(p_0) = \lambda_1(p_0)$. La multiplicité au sens classique de l'anneau local $\mathcal{O}_{W, p_0}$ est $\mu(W, p_0) = 1$ si W est régulier en p_0 , et $\mu(W, p_0) = 2$ sinon. Soit $R \subset W$ le diviseur de ramification de $W \rightarrow Z := W/\langle \sigma \rangle$ (donc $R = V(\text{Ann } \Omega_{W/Z}^1)$). Alors si $\text{car}(k) \neq 2$ et si $p_0 \in R$, on peut interpréter $\lambda(p_0)$ comme étant la multiplicité $\mu(R, p_0)$ de l'anneau local de R en p_0 . Par contre, si $\text{car}(k) = 2$, $\lambda(p_0)$ ne dépend pas que de R .

Lemme 7. Soient W un modèle de Weierstrass de C , $p_0 \in W_k$ un point fermé. On a les propriétés suivantes :

- (a) Le point p_0 est lisse sur k si et seulement si $\lambda(p_0) = 0$. Il est régulier dans W si et seulement si $\lambda(p_0) \leq 1$.
- (b) Soient $v = t/S_0(x)^r$, B_r la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x, v]$ dans $K(C)$, et $l = [\lambda_r(p_0)/2]$. Si $y \in B$ est tel que $\lambda_r(p_0, y) = \lambda_r(p_0)$, alors $\{1, y/S_0(x)^l\}$ est une base de B_r sur $\mathcal{O}_K[x, v]$ (en tant que module).
- (c) Il existe une base $\{1, y\}$ de B telle que $\lambda_s(p_0, y) = \lambda_s(p_0)$ pour tout $s \leq r$.
- (d) Soit B' la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x, S_0(x)/t]$ dans $K(C)$, soit y tel que $\lambda(p_0) = \lambda(p_0, y)$. Alors $\{1, y/t^{[\lambda(p_0)/2]}\}$ est une base de B' sur $\mathcal{O}_K[x, S_0(x)/t]$.
- (e) Posons $\epsilon = 0$ si W_k est réduit et $\epsilon = 1$ sinon. Alors pour tout $1 \leq s \leq r$, on a

$$\min \{1, \delta(p_0)\} \leq \lambda_s(p_0) - s\epsilon \leq \lambda_r(p_0) - r\epsilon \leq \delta(p_0), \quad s\lambda_r(p_0) \leq r\lambda_s(p_0).$$

De plus, si $r \geq \delta(p_0)$, alors $\lambda_r(p_0) - r\epsilon = \delta(p_0)$.

- (f) L'une des deux inégalités suivantes est toujours vérifiée suivant la nature de W_k :

$$\sum_{p \in W_k} [k(p) : k](\lambda(p) - \epsilon) \leq 2g + 2,$$

$$\sum_{p \in W_k} [k(p) : k](\lambda(p) - 1) \leq 2g.$$

Preuve. (a) résulte immédiatement du lemme 5.

(b) Soit $z = y/S_0(x)^l$. Posons $a = Q(x)/S_0(x)^l$, $b = -P(x)/s_0(x)^{2l}$. Alors $a, b \in \mathcal{O}_K[x, v]$ et $z^2 + az + b = 0$, donc $z \in B_r$. Considérons la sous-algèbre $D := \mathcal{O}_K[x, v, z]$ de B_r . On veut montrer que $D = B_r$. Comme

$$D \otimes K = K[x, 1/S_0(x), y] = B_r \otimes K$$

il suffit de montrer que D est normal. L'algèbre D est d'intersection complète sur $\mathcal{O}_K$, déterminée par les deux relations $S_0(x)^r v = t$, $z^2 + az + b = 0$, et on a $\dim D = 2$. D'après un théorème de Serre ([Mat], Theorem 39, page 125), il suffit de montrer que $\text{Spec } D$ est normal en codimension 1, ou encore qu'il est normal aux points génériques de la fibre spéciale $\text{Spec } D \otimes k$. Soient ξ un tel point et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de D correspondant à ξ .

On a $t \in \mathfrak{p}$. Si $v \in \mathfrak{p}$, alors $D_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p} \cap B}$ est normal. Supposons donc $v \notin \mathfrak{p}$. Alors $S_0(x) \in \mathfrak{p}$. Il est facile de vérifier que si $\lambda_r(p_0)$ est impair, alors $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}$ est engendré par z et que $S_0(x)D_{\mathfrak{p}} = z^2 D_{\mathfrak{p}}$. Si $\lambda(p_0)$ est pair, on a $D/(S_0(x)) = k(q_0)[v, z]$. On montre comme dans le lemme 2 que c'est une algèbre réduite. Il suit que $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}$ est engendré par $S_0(x)$. Dans tous les cas, $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}$ est principal. Donc D est normal. On voit de plus que la parité de $\lambda_r(p_0)$ est déterminée par la structure de l'algèbre D .

(c) On peut supposer $\text{car}(k) = 2$. On montre par récurrence sur r la propriété suivante : il existe une base $\{1, y\}$ de B telle que pour tout $s \leq r$, on ait ou bien $2\lambda_s(p_0, Q) \leq \lambda_s(p_0, P)$, ou bien (lorsque l'on écrit $P(x) = \sum_i c_i(x)S_0(x)^i$ dans la base $S_0(x)$ -adique) $2i + s\nu(c_{2i}) > \lambda_s(p_0, P)$ pour tout i tel que $\nu(c_{2i}) \in \mathbb{N}$ (voir la méthode de calcul de $\lambda_r(p_0)$ plus loin).

Soit donc $\{1, y\}$ une base de B construite comme ci-dessus si $\text{car}(k) = 2$ et telle que $Q(x) = 0$ si $\text{car}(k) \neq 2$. On montre exactement comme dans (b) que pour tout $s \leq r$, $\mathcal{O}_K[x, v, y/S_0(x)^{l_s}] = B_s$ où $l_s = [\lambda_s(p_0, y)/2]$. Cela implique que $[\lambda_s(p_0)/2] = [\lambda_s(p_0, y)/2]$. D'autre part, les parités des $\lambda_s(p_0)$ et $\lambda_s(p_0, y)$ étant déterminées de la même façon par la structure de B_s , on a l'égalité $\lambda_s(p_0) = \lambda_s(p_0, y)$.

(d) Cela se démontre de la même manière que (b).

(e) Il suffit de vérifier les inégalités sur les polynômes dans $\mathcal{O}_K[x]$, ce qui est immédiat.

(f) Cela résulte du lemme 6 (c)-(e) et de l'inégalité $\lambda(p) - \epsilon \leq \delta(p)$. $\square$

Détermination effective de $\lambda_r(p_0)$.

Supposons $p_0 \in \text{Spec } B$. Soit $\{1, y\}$ une base de B . Si $\text{car}(k) \neq 2$, alors $\lambda_r(p_0) = \lambda_r(p_0, 4P + Q^2)$.

Supposons $\text{car}(k) = 2$. Si $2\lambda_r(p_0, Q) \leq \lambda_r(p_0, P)$ ou si $\lambda_r(p_0, P)$ est impair, alors $\lambda_r(p_0) = \lambda_r(p_0, y)$. Sinon, écrivons $P(x)$ dans la base $S_0(x)$ -adique

$$P(x) = \sum_j c_j(x)S_0(x)^j.$$

S'il existe i tel que $i + r\nu(c_i) = \lambda_r(p_0, P)$ et que $\nu(c_i)$ soit impair, on a encore $\lambda_r(p_0) = \lambda_r(p_0, y)$. Sinon, pour tout indice $2m$ tel que $2m + r\nu(c_{2m}) = \lambda_r(p_0, P)$ et que $\nu(c_{2m})$ soit pair, on prend $b_m(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ tel que $\tilde{b}_m(x) - \tilde{c}'_{2m}(x) \in \tilde{S}_0(x)k[x]$, où $c'_{2m}(x) = c_{2m}(x)/t^{\nu(c_{2m})}$. Posons $y_1 = y + \sum_m t^{\nu(c_{2m})/2} b_m(x)S_0(x)^m$. On a $\lambda_r(p_0, y_1) > \lambda_r(p_0, y)$. On poursuit la même opération avec y_1 .

Remarque 9. On voit de cette manière que si $[k(p_0) : k] \leq 2$, alors il existe une base standard satisfaisant l'énoncé du lemme 7 (c). Cela est faux en général.

6.3 Interprétation des multiplicités via les faisceaux dualisants.

On va interpréter les multiplicités $\lambda_r(p_0)$ de façon géométrique. On verra en particulier que ce nombre ne dépend pas du choix d'un générateur x .

Fixons $r \geq 1$. Notons encore par $\mathfrak{m}_{q_0}$ le faisceau d'idéaux sur $W/\langle\sigma\rangle$ correspondant au point q_0 . Soit $Z_r \rightarrow W/\langle\sigma\rangle$ l'éclatement de $W/\langle\sigma\rangle$ de centre $t\mathcal{O}_{W/\langle\sigma\rangle} + \mathfrak{m}_{q_0}^r$, soit $Y_r \rightarrow Z_r$ la normalisation de Z_r dans C . Alors il existe un unique morphisme $\phi_r : Y_r \rightarrow W$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & W/\langle\sigma\rangle \\ \phi_r \uparrow & & \uparrow \\ Y_r & \longrightarrow & Z_r = Y_r/\langle\sigma\rangle \end{array}$$

La fibre spéciale de Z_r est la réunion d'une composante irréductible de multiplicité 1 et d'une composante de multiplicité r . Ces dernières se coupent au point de $\text{Spec } \mathcal{O}_K[x, v]$ (avec les notations du lemme 7 (b)) correspondant à l'idéal maximal $(t, S_0(x), v)$.

Notons que si $\lambda(p_0) \geq 2$, $Y_1 \rightarrow W$ est aussi la normalisation de l'éclatement de W de centre p_0 .

Rappelons la définition suivante :

Définition 11. Soit $\phi : S \rightarrow T$ un morphisme propre birationnel de schémas connexes normaux. Soit F un fermé pur de codimension 1 dans T . Alors le *transformé strict de F dans S* est l'adhérence $\{\phi^{-1}(\Xi)\}$ dans S , où Ξ est la réunion des points génériques de F . Notons que ϕ induit un isomorphisme d'un voisinage de $\phi^{-1}(\Xi)$ sur un voisinage de Ξ .

Lemme 8. Soient $r \geq 1$, $p_0 \in W_k$ et $\phi_r : Y_r \rightarrow W$ comme ci-dessus.

- (a) Soit Γ une composante irréductible de $\phi_r^{-1}(p_0)$. Soit $m(\Gamma)$ sa multiplicité dans Y_r . Alors $m(\Gamma) = r$ si $\lambda_r(p_0)$ est pair et $m(\Gamma) = 2r$ sinon.
- (b) Soient ω_{Y_r}, ω_W les faisceaux dualisants sur $\mathcal{O}_K$ respectivement de Y_r et de W . Soit ξ le point générique de Γ . Alors on a un isomorphisme canonique

$$((\phi_r^* \omega_W)^\vee \otimes \omega_{Y_r})_\xi^{\otimes r} \simeq t^{l-r} \mathcal{O}_{Y_r, \xi}.$$

En particulier, $\lambda_r(p_0)$ ne dépend pas du choix de x .

- (c) Soit $p_{0,r} \in Y_r$ un point au-dessus de p_0 et appartenant au transformé strict de W_k dans Y_r . Alors $p_{0,r}$ est régulier dans Y_r si et seulement si $[\lambda_r(p_0)/2] = [\lambda_{r+1}(p_0)/2]$.
- (d) Si W_k n'est pas réduit, alors l'égalité ci-dessus implique que $\delta(p_0) = \lambda_r(p_0) - r$.

Preuve. (a) Soit ξ le point générique de Γ , soit ν_ξ la valuation de $K(C)$ associé à l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{Y_r, \xi}$, alors par définition $m(\Gamma) = \nu_\xi(t) = r\nu_\xi(S_0(x))$. De plus, on a vu dans la preuve du lemme 7 (c) que $\nu(S_0(x)) = 1$ ou 2 suivant que $\lambda_r(p_0)$ est pair ou non. D'où le résultat.

(b) Conservons les notations du lemme 7 (b). Soit $y \in B$ tel que $\lambda_r(p_0, y) = \lambda_r(p_0)$, soit $z = y/S_0(x)^l$. Notons $U = \text{Spec } B$ et $U_r = \text{Spec } B_r$. On a $\xi \in U_r$, $\phi_r^{-1}(U) = U_r$ (voir par exemple [Liu2], lemme 2)

$$\omega_W(U) = Bdx/(2y + Q(x)), \quad \omega_{Y_r}(U_r) = B_r S_0(x)^{-r} dx/(2z + Q(x)/S_0(x)^l).$$

D'où

$$((\phi_r^* \omega_W)^\vee \otimes \omega_{Y_r})(U_r) = S_0(x)^{l-r} B_r.$$

Comme v n'est pas identiquement nulle sur Γ , on a $S_0(x)^r \mathcal{O}_{Y_r, \xi} = t \mathcal{O}_{Y_r, \xi}$. D'où le résultat.

(c) Supposons $\text{car}(k) = 2$, le cas contraire étant plus simple à traiter. On garde les notations du lemme 7. Le point $p_{0,r}$ correspond à un idéal maximal $\mathfrak{m}_{p_{0,r}}$ de B_r contenant $S_0(x)$ et v . Si $Q(x)/S_0(x)^l \notin (S_0(x), v)$, alors $Y_r \rightarrow Z_r$ est non-ramifié en $p_{0,r}$, donc $p_{0,r}$ est régulier dans Y_r . De plus, on a dans ce cas-là

$$\lambda_{r+1}(p_0, Q) = \lambda_r(p_0, Q) \leq \lambda_r(p_0)/2 \leq \lambda_{r+1}(p_0, P)/2$$

donc $\lambda_{r+1}(p_0) = \lambda_{r+1}(p_0, y) = \lambda_r(p_0)$. On suppose dans la suite que $Q(x)/S_0(x)^l \in (S_0(x), v)$. Cela implique que $\lambda_{r+1}(p_0, Q) \geq l + 1$. Quitte à faire une translation sur y , on peut supposer que $P(x)/S_0(x)^{2l} \in (S_0(x), v)$. Donc $\lambda_{r+1}(p_0, P) \geq 2l + 1$ et $y/S_0(x)^l \in \mathfrak{m}_{p_{0,r}}$. Par conséquent, Y_r est régulier en $p_{0,r}$ si et seulement si $P(x)/S_0(x)^{2l} \notin (S_0(x), v)^2$, ce qui équivaut à $\lambda_{r+1}(p_0, P) = 2l + 1$. L'équivalence : Y_r régulier en $p_{0,r} \iff [\lambda_{r+1}(p_0)/2] = [\lambda_r(p_0)/2]$ est alors immédiate.

(d) Avec les notations ci-dessus, il existe (en écrivant $P(x) = \sum_i a_i(x) S_0(x)^i$) un i_0 tel que $\nu(a_{i_0}) = 1$ et $i_0 + r\nu(a_{i_0}) = 2l$. On a donc $\lambda_r(p_0) = 2l$, et $\delta(p_0) = i_0 = 2l - r$. $\square$

Remarque 10. En utilisant le lemme ci-dessus, on peut montrer que le faisceau quotient $\omega_W/\phi_{1*}\omega_{Y_1}$, qui est à support en p_0 , est isomorphe au faisceau associé à B/I , où I est l'idéal $\{R(x) + T(x)y \in B \mid \lambda(p_0, R) \geq [\lambda(p_0)/2] - 1\}$. Supposons que $p_0 \in W_k$ soit une singularité rationnelle de W (voir [Art], p. 268). Donc $\phi_{1*}(\omega_{Y_1}) = \omega_W$. Il suit alors que $\lambda(p_0) \leq 3$. Cela découle aussi du fait que l'éclatement d'une singularité rationnelle donne un schéma normal ([Art], Theorem 4.9).

7. CRITÈRE DE MINIMALITÉ

Soit W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. On va définir pour tout point rationnel $p_0 \in W_k(k)$ une nouvelle multiplicité $\lambda'(p_0)$. Cela nous permettra de donner un critère de minimalité de W (corollaire 2) en fonction du maximum des multiplicités $\lambda'(p)$ et $\lambda(p)$ pour $p \in W_k(k)$. On étudie aussi le comportement du discriminant minimal $\nu(C)$ vis-à-vis d'un changement de base étale (proposition 4). Enfin, on montre une borne absolue de $\nu(C)$ sous certaines hypothèses (§7.3).

7.1 Critère de minimalité.

Définition 12. Soient W un modèle de Weierstrass de C et $p_0 \in W_k(k)$. On note $W(p_0)$ l'unique modèle de Weierstrass de C tel que $d(W, W(p_0)) = 1$ et que $p_0 \in W(p_0) \wedge W$ (voir déf. 7).

Avec les notations du §5, on a $\deg S_0(x) = 1$ et $W(p_0)$ est le modèle de Weierstrass de C associé à $S_0(x)/t$. D'autre part, on a un morphisme canonique $Y_1 \rightarrow W(p_0)$ (voir §6.3 pour la définition de Y_1) qui induit un isomorphisme d'un voisinage des points génériques de $\phi_1^{-1}(p_0)$ sur son image.

Définition 13. Soient W , p_0 comme ci-dessus. On note $\lambda'(p_0)$ l'entier

$$\lambda'(p_0) := \max\{\lambda(p) \mid p \in W(p_0)_k(k), p \notin W(p_0) \wedge W\}.$$

Par convention le maximum d'un ensemble vide est $-\infty$. Plus généralement, pour tout entier $d \geq 1$, on peut définir $\lambda^d(p_0)$ comme étant le maximum

$$\max\{\lambda(p) \mid d(W', W) \leq d, p_0 \in W' \wedge W, p \in W'_k(k), p \notin W' \wedge W\}.$$

Soit B' la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x, S_0(x)/t]$ dans $K(C)$. Alors $\lambda'(p_0)$ est le maximum des multiplicités $\lambda(p)$ (calculées dans $W(p_0)$) pour $p \in \text{Spec}(B' \otimes k)$ rationnels sur k .

Lemme 9. *Soient W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$, $p_0 \in W_k(k)$ et $W(p_0)$ le modèle de Weierstrass associé à p_0 comme ci-dessus.*

(a) *On a*

$$\nu(\Delta_{W(p_0)}) - \nu(\Delta_W) = 2(2g + 1)(g + 1 - 2[\lambda(p_0)/2]).$$

(b) *Posons $\epsilon = 0$ si W_k est réduit et $\epsilon = 1$ sinon. Soit $p'_0 \in W(p_0) \cap (W(p_0) \wedge W)$, alors*

$$\lambda(p'_0) = 2g + 2 - 2[\lambda(p_0)/2] + \epsilon, \quad \lambda_2(p'_0) \geq \lambda_2(p_0) - 2[\lambda(p_0)/2] + 2g + 2.$$

(c) *On a $\lambda'(p_0) \leq 2[(\lambda(p_0) + 1)/2] - \epsilon$.*

(d) *L'une des deux inégalités*

$$\sum_{p \in W(p_0)_k \setminus (W(p_0) \wedge W)} \delta(p)[k(p) : k] \leq \lambda(p_0) - \epsilon$$

ou

$$\sum_{p \in W(p_0)_k \setminus (W(p_0) \wedge W)} (\delta(p) - 1)[k(p) : k] \leq \lambda(p_0) - 1 - \epsilon$$

est toujours vérifiée. De plus, la première inégalité est toujours une égalité si $\lambda(p_0)$ est impair ou si $\text{car}(k) \neq 2$.

Preuve. On garde les notations du §5. On peut supposer $S_0(x) = x$. Notons $u = x/t$ et $l = [\lambda(p_0)/2]$. Soit $\{1, y\}$ une base standard de B telle que $\lambda(p_0, y) = \lambda(p_0)$ (voir remarque 9).

(a) Soit $z = y/t^l$. Le modèle W' admet d'après le lemme 7 (d) un ouvert affine d'équation

$$z^2 + (Q(tu)/t^l)z = P(tu)/t^{2l}.$$

On en déduit immédiatement la différence $\nu(\Delta_{W(p_0)}) - \nu(\Delta_W)$ grâce à la formule à la fin du §2.

(b) Le point p'_0 est rationnel sur k . Le modèle $W(p_0)(p'_0)$ associé à $p'_0 \in W(p_0)$ n'est autre que W . Donc

$$\nu(\Delta_W) - \nu(\Delta_{W(p_0)}) = 2(2g + 1)(g + 1 - 2[\lambda(p'_0)/2]).$$

Il suit que $2[\lambda(p'_0)/2] = 2g + 2 - 2l$. Comme $\lambda(p'_0) = 2[\lambda(p'_0)/2] + \epsilon$, on a l'égalité annoncée. Soit $\{1, y\}$ une base standard de B telle que $\lambda_i(p_0, y) = \lambda_i(p_0)$ pour $i = 1, 2$ (voir remarque 9). Soient $v = 1/u$, $w = y/(t^l u^{g+1})$. Alors le point p'_0 est un zéro de v . Donc $\lambda_2(p'_0) \geq \lambda_2(p'_0, w) = \lambda_2(p_0) - 2l + 2g + 2$.

(c) Cela résulte du lemme 7 (f) compte tenu de l'égalité sur $\lambda(p'_0)$ ci-dessus.

(d) Soit $\{1, y\}$ une base standard de B . Quitte à faire une translation sur y , on peut supposer que l'on a aussi $\delta(p_0, y) = \delta(p_0)$. Posons $R(u) = Q(tu)/t^l$, $T(u) = P(tu)/t^{2l}$ et $T_1(u) = T(u)/t$ si $\nu(R) \geq 1$, $\nu(T) \geq 1$. On a alors $\deg \tilde{R}(u) \leq l - \epsilon$, $\deg \tilde{T}(u) \leq 2l - \epsilon$ et $\deg \tilde{T}_1(u) \leq 2l + 1 - \epsilon$ s'il y a lieu de considérer $T_1(u)$. Les assertions de (d) se montrent comme pour le lemme 6 (c)–(e). $\square$

Proposition 3. Soient W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$, $p_0 \in W_k$. Considérons les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout modèle de Weierstrass W' non isomorphe à W et tel que $p_0 \in W' \wedge W$ (voir déf. 7), on a $\nu(\Delta_{W'}) \geq \nu(\Delta_W)$;
- (ii) On a les inégalités $\lambda(p_0) \leq 2[(g+1)/2] + 1$ et $\lambda'(p_0) \leq g+2$;
- (iii) Pour tout modèle de Weierstrass W' comme dans (i), on a $\nu(\Delta_{W'}) > \nu(\Delta_W)$;
- (iv) On a les inégalités $\lambda(p_0) \leq 2[g/2] + 1$ et $\lambda'(p_0) \leq g+1$.

Alors (i) $\iff$ (ii); et (iii) $\iff$ (iv).

Preuve. Montrons seulement (i) $\iff$ (ii). L'autre équivalence se démontre de la même façon.

Supposons d'abord que les inégalités de (ii) ne sont pas simultanément satisfaites. D'après le lemme 9 (c), on a $\lambda(p_0) \geq g+2$. Si g est pair ou si $\lambda(p_0) \geq g+3$, on a $\nu(\Delta_{W(p_0)}) < \nu(\Delta_W)$ d'après le lemme 9 (a). Supposons g impair et $\lambda(p_0) = g+2$. Alors par hypothèse $\lambda'(p_0) \geq g+3$. Soit $p_1 \in W(p_0)(k) \setminus (W(p_0) \wedge W)$ tel que $\lambda(p_1) = \lambda'(p_0)$, soit W' le modèle $W(p_0)(p_1)$ associé à p_1 . Il suit du lemme 9 (a) que $\nu(\Delta_{W'}) < \nu(\Delta_{W(p_0)}) = \nu(\Delta_W)$. Ce qui montre que (i) implique (ii).

Montrons maintenant la réciproque. Supposons les inégalités de (ii) satisfaites. Soit $d = d(W, W')$. Il existe $x, u \in K(C)^{(\sigma)}$ tels que $W/\langle \sigma \rangle = \mathbb{P}_x^1$, $W'/\langle \sigma \rangle = \mathbb{P}_u^1$, $x = t^d u$, et que $x(p_0) = 0$. Pour tout $0 \leq i \leq d$, soit W^i le modèle de Weierstrass associé à x/t^i . Notons p_i un point de W^i correspondant à $(x/t^i) = t = 0$. Alors $W^0 = W$, $W^d = W'$ et $W^{i+1} = W^i(p_i)$.

Supposons que g est impair. On montre par récurrence sur i et en utilisant le lemme 8 (a) et le lemme 9 (c) que p_i satisfait les inégalités de (ii) pour tout $i \leq d$. Ce qui implique que $\nu(\Delta_{W'}) = \nu(\Delta_{W^d}) \geq \nu(\Delta_{W^{d-1}}) \geq \dots \geq \nu(\Delta_{W^0}) = \nu(\Delta_W)$.

Supposons maintenant g pair. On a

$$\nu(\Delta_{W^2}) - \nu(\Delta_W) = 4(2g+1)(g+1 - [\lambda(p_0)/2] - [\lambda(p_1)/2]).$$

Comme $[\lambda(p_0)/2] + [\lambda(p_1)/2] \leq [(g+1)/2] + [(g+2)/2] = g+1$, on a $\nu(\Delta_{W^2}) \geq \nu(\Delta_W)$. D'autre part, on montre comme dans le cas g impair que les points p_{2i} satisfont les inégalités de (ii). Donc $\nu(\Delta_{W^{2i+1}}), \nu(\Delta_{W^{2i+2}}) \geq \nu(\Delta_{W^{2i}})$. D'où $\nu(\Delta_{W'}) \geq \nu(\Delta_W)$. $\square$

Corollaire 2. Soit W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. Alors on a les propriétés suivantes :

- (a) W est minimal si et seulement si pour tout point $p_0 \in W_k(k)$, on a

$$\lambda(p_0) \leq 2[(g+1)/2] + 1, \quad \lambda'(p_0) \leq g+2.$$

- (b) W est l'unique modèle de Weierstrass minimal si et seulement si pour tout point $p_0 \in W_k(k)$, on a

$$\lambda(p_0) \leq 2[g/2] + 1, \quad \lambda'(p_0) \leq g+1.$$

Corollaire 3. Soit W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. S'il est régulier, alors c'est l'unique modèle de Weierstrass minimal de C sur $\mathcal{O}_K$.

Remarque 11. Il est aisé, en partant d'un modèle de Weierstrass W quelconque, de trouver un modèle de Weierstrass minimal. En effet, on calcule $\lambda(p_0)$ et $\lambda'(p_0)$ pour tous les points de $W_k(k)$ singuliers dans W . S'il existe un p_0 ne satisfaisant pas les inégalités de prop. 3 (ii), on remplace W par le modèle de Weierstrass $W(p_0)$

associé à p_0 , et on recommence avec $W(p_0)$. Lorsque cela n'est plus possible, c'est que le dernier modèle de Weierstrass est minimal.

Notons aussi que si $\lambda(p_0) \leq g + 1$, alors $\lambda'(p_0) \leq g + 2$ en vertu du lemme 9 (c).

Exemple. Soit C la courbe hyperelliptique définie par l'équation $y^2 = x^5 + n$, où n est un entier impair tel que $\nu_p(n) \leq 3$ pour tout nombre premier p . Le discriminant de cette équation est $2^8 5^5 n^4$ (voir §2). Soit W le modèle de Weierstrass (sur $\mathbb{Z}$) associé à cette équation. Montrons que W est minimal sur $\mathbb{Z}$.

On a $g = 2$. Soit p un nombre premier. Si $\nu_p(n) \leq 1$, alors $\nu_p(\Delta_W) < 10 = 2(2g + 1)$, donc W est minimal sur $\mathbb{Z}_p$ (voir §7.3 ci-dessous). Si $\nu_p(n) \geq 2$, alors W_p a un unique point singulier de multiplicité $\lambda = \nu_p(n) \leq 3$, il est donc minimal d'après le corollaire 2.

7.2 Changement de base étale.

Soit $\mathcal{O}_L$ un anneau de valuation discrète étale (*i.e.* non-ramifié) sur $\mathcal{O}_K$, de corps de fractions L . On souhaite comparer le discriminant minimal de C avec celui de $C_L := C \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L$. On note encore par ν la valuation sur L . Elle prolonge celle de $\mathcal{O}_K$.

Lemme 10. *Soit W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. Soit $p_0 \in W_k$ un point fermé. Alors pour tout point $r_0 \in W_{\mathcal{O}_L} := W \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathcal{O}_L$ au-dessus de p_0 , on a $\lambda(r_0) = \lambda(p_0)$.*

Preuve. Il est clair d'abord que $W_{\mathcal{O}_L}$ est un modèle de Weierstrass de C_L sur $\mathcal{O}_L$. Comme le revêtement étale d'un schéma normal est normal ([Mil2], I.3, Prop. 3.17 (b), page 27), la construction du morphisme $\phi_1 : Y_1 \rightarrow W$ du §6 commute au changement de base $\text{Spec } \mathcal{O}_L \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$. Plus précisément, soit $\psi : Y'_1 \rightarrow W_{\mathcal{O}_L}$ le morphisme construit comme dans §6.3 relativement à r_0 . Alors il existe un morphisme $(Y_1)_{\mathcal{O}_L} \rightarrow Y'_1$ qui induit un isomorphisme dans un voisinage de $\psi^{-1}(r_0)$. Comme la formation des faisceaux dualisants commute au changement de base étale, et qu'un tel changement de base ne modifie pas les multiplicités des composantes irréductibles, il résulte du lemme 8 (a)-(b) que $\lambda(r_0) = \lambda(p_0)$. $\square$

Proposition 4. *Soit W un modèle de Weierstrass minimal de C . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe une extension quadratique non-ramifiée $\mathcal{O}_L$ de $\mathcal{O}_K$ telle que $W_{\mathcal{O}_L}$ ne soit pas minimal.*
- (ii) *Il existe une extension finie non-ramifiée $\mathcal{O}_L$ de $\mathcal{O}_K$ telle que $W_{\mathcal{O}_L}$ ne soit pas minimal.*
- (iii) *L'entier g est pair, et il existe $p_0 \in W_k$ tel que $[k(p_0) : k] = 2$, $\lambda(p_0) = g + 2$.*

De plus, si ces conditions sont vérifiées, W est l'unique modèle minimal de C ; le discriminant minimal $\nu(C_L)$ sur $\mathcal{O}_L$ vérifie

$$\nu(C_L) = \nu(C) - 2(2g + 1)$$

et ce discriminant minimal $\nu(C_L)$ reste inchangé par toute extension non-ramifiée de $\mathcal{O}_L$.

Preuve. Il n'y a rien à démontrer pour (i) $\implies$ (ii). Supposons que (ii) est vraie. Les inégalités (ii) de la prop. 3 ne sont pas simultanément satisfaites pour un point rationnel r_0 de la fibre spéciale de $W_{\mathcal{O}_L}$. Soit $p_0 \in W_k$ l'image de r_0 . Alors $\lambda(p_0) = \lambda(r_0) \geq g + 2$. De plus, $k(p_0) \neq k$ car sinon W ne serait pas minimal. Il suit du lemme 6 (d)-(e) et du lemme 7 (e) que $\lambda(p_0) = g + 2$, W_k n'est pas réduit,

et que $[k(p_0) : k] = 2$. D'après le lemme 9 (c), on a $\lambda'(r_0) \leq g + 2$. Donc g doit être pair pour que $W_{\mathcal{O}_L}$ ne soit pas minimal. Donc (ii) implique (iii).

Supposons (iii) satisfaite. Soit $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]/(S_0(x))$ (avec les notations du §5). Alors $\mathcal{O}_L$ est une extension quadratique non-ramifiée de $\mathcal{O}_K$. De plus, si $r_0 \in W_{\mathcal{O}_L}$ est un antécédent de p_0 , alors r_0 est rationnel sur le corps résiduel de $\mathcal{O}_L$. Il suit du corollaire 2 (a) que $W_{\mathcal{O}_L}$ n'est pas minimal.

Pour la dernière assertion, après avoir remplacé $\mathcal{O}_K$ par $\mathcal{O}_L$, on est dans la situation d'un modèle de Weierstrass W tel qu'il existe $p_0 \in W_k(k)$ de multiplicité $\lambda(p_0) = g + 2$, et que W_k ne soit pas réduit. Soit $W' = W(p_0)$ le modèle de Weierstrass associé à p_0 . Alors on a $\nu(\Delta_{W'}) = \nu(\Delta_W) - 2(2g + 1)$ d'après lemme 9 (a). En utilisant le lemme 9 (b)-(c) et le fait que g est pair, on voit que W' remplit les critères du corollaire 2 (a) et est donc minimal. Comme la fibre spéciale de W' est réduite, il est minimal sur toute extension non-ramifiée de $\mathcal{O}_L$ d'après ce qui précède. $\square$

Remarque 12. La proposition ci-dessus décrit le comportement du discriminant minimal $\nu(C)$ vis-à-vis d'un changement de base étale $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$. La situation devient plus complexe lorsque $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ est ramifiée. Soient ν_L la valuation normalisée de L , $e_{L/K}$ l'indice de ramification. On a facilement $\nu(C) \geq e_{L/K}^{-1} \nu_L(C_L)$. Inversement, soit $c = \nu(C) - e_{L/K}^{-1} \nu_L(C_L)$. Il semble fort probable que les propriétés suivantes soient vraies :

- (a) si L/K est modérément ramifiée, alors c est majorée par une constante dépendant uniquement du genre g ;
- (b) si L/K est sauvagement ramifiée et si $\text{car}(K) = 0$, alors c est majorée par une constante dépendant uniquement de g et de l'indice de ramification absolu de K ;
- (c) enfin $c = 0$ si le modèle régulier minimal X de C sur $\mathcal{O}_K$ (voir §8) est semi-stable (c'est-à-dire que X_k est réduit et que les points singuliers de X_k sont des points doubles ordinaires).

La section suivante fournit une réponse à (a) dans un cas partiel. D'autre part, on peut montrer que si $0 < \text{car}(K) < 2g + 1$, la différence c peut être arbitrairement grande pour g fixé. Il suffit pour cela de prendre pour C des courbes elliptiques ayant potentiellement bonne réduction mais avec de grands conducteurs.

7.3 Le cas de la potentielle bonne réduction.

Soit W un modèle de Weierstrass de C . D'après la formule en fin de §2, si on a $\nu(\Delta_W) < 2(2g + 1) \text{pgcd}(g + 1, 2)$, alors W est minimal. L'inverse est faux, et il n'y a pas de majoration de $\nu(C)$ en terme uniquement de g et de K , même si $\text{car}(k) = 0$. Cela provient de l'éventualité de la réduction stable singulière. Cependant si C a potentiellement bonne réduction, on a une réciproque partielle.

Remarque 13. Supposons que C a potentiellement bonne réduction et que $\text{car}(k) = 0$ ou $\text{car}(k) > 2g + 1$. Alors le discriminant minimal $\nu(C)$ vérifie

$$\nu(C) \leq 2(2g + 1)(\lfloor (g + 1)/2 \rfloor + 1).$$

La borne est atteinte par la courbe associée à l'équation $y^2 = t(x^{2g+2} + t^{2\lfloor (g+1)/2 \rfloor})$.

Preuve. Soit W un modèle de Weierstrass minimal de C . Si W vérifie les conditions de la prop. 4, on peut voir que C n'a pas potentiellement bonne réduction. On peut donc supposer $\mathcal{O}_K$ strictement hensélien. Soit L l'extension de K de degré

minimal sur laquelle C acquiert bonne réduction. L'hypothèse sur $\text{car}(k)$ implique que L est modérément ramifiée sur K ([Vie], Satz 2.2). Pour un choix convenable de $x \in K(C)^{(\sigma)}$, W est associé à une équation entière $y^2 = P(x)$ et il existe $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_L$ tels que le changement de variable $x = \alpha u$, $y = \beta v$ conduise à une équation $v^2 = H(u)$ avec $H(u) \in \mathcal{O}_L[u]$ et $\text{disc}(H(u)) \in \mathcal{O}_L^*$.

Soient $n = [L : K]$, π une uniformisante de $\mathcal{O}_L$. Quitte à changer u et v , il existe $r, s \geq 0$, tels que $x = \pi^r u$, $y = \pi^s v$. Ecrivons $P(x) = \sum_i a_i x^i$. Alors $2s = \min\{n\nu(a_i) + ri \mid i \geq 0\}$, $P(x) = \pi^{2s} H(u)$, et $n\nu(\Delta_W) = 2(2g+1)(2s - (g+1)r)$. Comme l'image de $H(u)$ dans $k[u]$ est un polynôme séparable de degré $\geq 2g+1$, en utilisant les inégalités sur les multiplicités λ (cor. 2), on obtient sans difficulté la majoration souhaitée. $\square$

8. RELATION AVEC LE MODÈLE RÉGULIER MINIMAL

Soit X le modèle régulier minimal de C sur $\mathcal{O}_K$. C'est par définition un schéma régulier, projectif et plat sur $\mathcal{O}_K$, à fibre générique X_K isomorphe à C et sans diviseur exceptionnel (voir [Chi], §1). Ce modèle est unique à isomorphe près.

Soit W un modèle de Weierstrass de C . On note $\widetilde{W} \rightarrow W$ la désingularisation minimale de W . Dire que $\widetilde{W}$ est isomorphe à X revient à dire que le transformé strict de W_k dans $\widetilde{W}$ (voir §6, déf. 11) ne contient pas de diviseur exceptionnel.

Lemme 11. *Soit $\mathcal{O}_L$ un anneau de valuation discrète étale sur $\mathcal{O}_K$. Alors $X_{\mathcal{O}_L}$ est le modèle régulier minimal de C_L sur $\mathcal{O}_L$.*

Preuve. Le critère de Castelnuovo pour les diviseurs exceptionnels ([Chi], Theorem 3.1) montre que l'on peut remplacer $\mathcal{O}_K$ par son complété. On suppose donc $\mathcal{O}_K$ complet. Il suffit de montrer que $X \times \widetilde{\mathcal{O}_L}$ est minimal, où $\widetilde{\mathcal{O}_L}$ est la clôture galoisienne de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_K$. Comme $\widetilde{\mathcal{O}_L}$ reste étale sur $\mathcal{O}_K$ car celui-ci est complet, on peut supposer que $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ est galoisien de groupe de Galois G .

Notons $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$ et $T = \text{Spec } \mathcal{O}_L$. Soit Y le modèle régulier minimal de C_L sur T . Alors G opère sur Y (en tant que S -schéma) par l'unicité du modèle régulier minimal. Le schéma Y étant projectif sur T ([Lic2], Theorem 2.8), donc projectif sur S , le quotient Y/G existe et est un modèle normal de C sur S . Donc $(Y/G) \times_S T$ est normal car étale sur Y/G ([Mil2], *loc. cit.*). Il suit que le morphisme canonique $Y \rightarrow (Y/G) \times_S T$ est un isomorphisme (car il est fini et birationnel). Cela implique que $Y \rightarrow Y/G$ est plat, donc Y/G est régulier ([Mat], Theorem 51, page 155). Par conséquent Y/G domine X , donc Y domine $X \times_S T$, qui est lui-même régulier, on a donc $Y \simeq X \times_S T$. $\square$

Remarque 14. Les résultats de 7.2 et le lemme ci-dessus restent valables si l'on remplace une extension étale de $\mathcal{O}_K$ par le complété de $\mathcal{O}_K$ pour la valuation ν .

Proposition 5. *Soit W un modèle de Weierstrass minimal de C sur $\mathcal{O}_K$. Soient $\widetilde{W} \rightarrow W$ la désingularisation minimale de W et X le modèle régulier minimal de C sur $\mathcal{O}_K$. Supposons qu'il existe $p_0 \in W_k$ tel que $\lambda(p_0) = g+2$ si g est pair et $\lambda_2(p_0) = 2g+4$ si g est impair. Alors on a les propriétés suivantes :*

- (a) *La fibre spéciale W_k n'est pas réduite, et $\widetilde{W}$ n'est pas isomorphe à X .*
- (b) *Si g est impair, alors C a exactement deux modèles de Weierstrass minimaux. De plus, les composantes irréductibles de X_k sont alors de multiplicités paires.*

Preuve. Supposons d'abord que g est pair. On a $[k(p_0) : k] = 2$, $\lambda(p_0) = g + 2$ en vertu du corollaire 2 (a) et du lemme 7 (f). Il résulte alors des lemmes 6 et 7 que W_k n'est pas réduit, $\delta(p_0) = g + 1$, $\lambda_2(p_0) = g + 3$ et que p_0 est l'unique point singulier de W . Soit $\phi_1 : Y_1 \rightarrow W$ le morphisme construit au §6.3 relatif au point p_0 avec $r = 1$. D'après le lemme 8 (c), Y_1 est régulier dans un voisinage de Γ , transformé strict de W_k . Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ les composantes de $(Y_1)_k$ qui coupent Γ , Θ l'image de Γ dans $Y_1/\langle\sigma\rangle$ et $\Theta_1 \subset Y_1/\langle\sigma\rangle$ l'image commune des Γ_i . Alors les Γ_i et Θ_1 sont définis sur $k(p_0)$ et on a $\Gamma_i \cdot \Gamma \geq 2$, $\Theta \cdot \Theta_1 = 2$ (les nombres d'intersection sont calculés sur k). La formule de projection (voir par exemple [Lan], III, Theorem 4.1)

$$\Gamma \cdot \phi_1^* \Theta_1 = (\phi_{1*} \Gamma) \cdot \Theta_1$$

donne

$$\sum_{i \geq 1} (\Gamma \cdot \Gamma_i) = \Theta \cdot \Theta_1.$$

Cela implique que $n = 1$ et que $\Gamma \cdot \Gamma_1 = 2$. Comme W_k n'est pas réduit, $\Gamma \simeq \mathbb{P}_k^1$ et est de multiplicité 2 dans $(Y_1)_k$. Comme Γ_1 est de multiplicité 1 (lemme 8 (a)), on a $\Gamma^2 = -1$. En vertu du critère de Castelnuovo ([Chi], Theorem 3.1), Γ est un diviseur exceptionnel. Donc $\widetilde{W} \not\simeq X$.

Supposons maintenant g impair. En utilisant le corollaire 2 (a) et les lemmes 6 et 7, on trouve que W_k n'est pas réduit, $p_0 \in W_k(k)$, $\delta(p_0) = 2g + 2$, $\lambda(p_0) = g + 2$, $\lambda_2(p_0) = 2g + 4$, $\lambda_3(p_0) = 2g + 5$ et que p_0 est l'unique point singulier de W . Soit $Y_2 \rightarrow W$ le morphisme construit dans §6.3 relatif à p_0 avec $r = 2$. Alors Y_2 est régulier dans un voisinage du transformé strict de W_k dans Y_2 . On montre comme ci-dessus que $\widetilde{W} \not\simeq X$.

Soit $W_1 = W(p_0)$ le modèle de Weierstrass associé à $p_0 \in W_k(k)$ (voir déf. 12). Alors W_1 est minimal (lemme 9 (a)). Soit $p'_0 \in W_1 \cap (W_1 \wedge W)$. Alors $\lambda_2(p'_0) = 2g + 4$ et $W_1(p'_0) = W$ (lemme 9 (b)). D'après la proposition 2, W et W_1 sont les deux seuls modèles de Weierstrass minimaux de C .

Soit Z_1 le modèle de $\mathbb{P}_K^1$ défini dans §6.3 relatif à p_0 et $r = 1$. Soient $Z \rightarrow Z_1$ l'éclatement du point d'intersection des deux composantes irréductibles de $(Z_1)_k$ et $Y \rightarrow Z$ la normalisation de Z dans C . Alors Z_k a exactement trois composantes irréductibles $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2$, les deux premières sont de multiplicité 1 et correspondent respectivement à $(W/\langle\sigma\rangle)_k$ et $(W_1/\langle\sigma\rangle)_k$, et Θ_2 est de multiplicité 2. Il y a une seule composante irréductible Γ_i de Y_k au-dessus de Θ_i . De plus Y est isomorphe à Y_2 dans un voisinage de Γ_0 . Il suit que les points singuliers de Y sont concentrés dans $\Gamma_0 \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_1)$. Par symétrie, les points singuliers de Y sont contenus dans $(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) \setminus \Gamma_2$. Soit $\widetilde{Y} \rightarrow Y$ la désingularisation minimale de Y . Comme $Y/\langle\sigma\rangle = Z$ est régulier et que $m(\Theta_2) = 2$, toute composante irréductible de $\widetilde{Y}/\langle\sigma\rangle$ au-dessus d'un point de $\Theta_2 \setminus (\Theta_0 \cup \Theta_1)$ est de multiplicité paire. Il suit que toute composante irréductible de $\widetilde{Y}_k$ distinctes de Γ_0 et Γ_1 est de multiplicité paire. Cela est donc vraie pour les composantes irréductibles de X_k puisque Γ_0 et Γ_1 sont des diviseurs exceptionnels. $\square$

Remarque 15. Conservons les hypothèses de la proposition 5. On peut montrer que si g est pair, alors le morphisme canonique $\widetilde{W} \rightarrow X$ est simplement la contraction du transformé strict de W_k dans $\widetilde{W}$. Cela est encore vrai si g est impair et $\text{car}(k) \neq 2$.

Proposition 6. *Soit W un modèle de Weierstrass minimal de C sur $\mathcal{O}_K$. Soient $\widetilde{W} \rightarrow W$ la désingularisation minimale de W et X le modèle régulier minimal de C sur $\mathcal{O}_K$. Supposons que pour tout point $p_0 \in W_k$ on ait $\lambda(p_0) \leq g + 1$ si g est pair et $\lambda_2(p_0) \leq 2g + 3$ si g est impair. Alors $\widetilde{W} \simeq X$.*

Preuve. Soit $\mathcal{O}_L$ une extension étale de $\mathcal{O}_K$. D'après la prop. 4, $W_{\mathcal{O}_L}$ est encore un modèle de Weierstrass minimal et le nouveau modèle régulier minimal est simplement $X_{\mathcal{O}_L}$ (lemme 11). On peut donc remplacer $\mathcal{O}_K$ par une extension étale maximale de sorte que k soit algébriquement clos.

Procédons maintenant par l'absurde. Supposons que $\widetilde{W} \not\simeq X$. Soit $\Gamma \subset \widetilde{W}$ le transformé strict d'une composante irréductible de W_k . Alors Γ est un diviseur exceptionnel. Soit Θ l'image de Γ dans $Z := \widetilde{W}/\langle \sigma \rangle$. On est dans l'une des situations suivantes :

- (i) Θ rencontre une seule autre composante irréductible Θ' de Z_k et Θ' est de multiplicité 1 dans Z_k ;
- (ii) Θ rencontre exactement deux autres composantes irréductibles de Z_k en deux points distincts; ces composantes sont de multiplicité 1;
- (iii) Θ rencontre une seule autre composante irréductible Θ' qui est de multiplicité 2.

La suite de la preuve se fera en distinguant ces trois situations.

Supposons que l'on est dans la situation (i). On peut voir comme dans [Liu2], lemme 4 que le point d'intersection $\Theta \cap \Theta'$ est d'épaisseur $e \in \{1, 2\}$ (plus précisément, $e = 2$ si W_k est intègre, $e = 1$ sinon). À la composante irréductible Θ (resp. Θ') correspond un modèle lisse de la forme $\mathbb{P}_x^1$ (resp. $\mathbb{P}_u^1$), il s'obtient en contractant les composantes de Z_k distinctes de Θ (resp. de Θ'). On peut supposer de plus que $u = t^e x$. Soient p_0 un point de W_k correspondant à $x = 0$, $W' = W(p_0)$ (voir déf. 12), et $p'_0 \in W'_k \cap (W' \wedge W)$. Le fait que Γ soit exceptionnel implique que p'_0 est régulier dans W' . D'après le lemme 9 (b) on a :

$$\begin{aligned} \text{si } e = 1, \text{ alors } \lambda(p_0) &= 2g + 2 - 2[\lambda(p'_0)/2] = 2g + 2 ; \\ \text{si } e = 2, \text{ alors } \lambda'(p_0) &= 2g + 2 - 2[\lambda(p'_0)/2] = 2g + 2. \end{aligned}$$

Donc dans les deux cas, on a $\max\{\lambda(p_0), \lambda'(p_0)\} \geq 2g + 2$. Cela est impossible car W est minimal.

Supposons que l'on est dans le cas (ii). Alors Γ est de multiplicité 2 dans $\widetilde{W}$, il coupe les autres composantes (qui sont de multiplicité 1) en exactement deux points. Donc W contient exactement deux points singuliers p_1, p_2 et W_k n'est pas réduit. Cela entraîne que $\delta(p) = 0$ pour tout $p \neq p_1, p_2$. Il suit du lemme 6 (c) que $2g + 2 = \delta(p_1) + \delta(p_2)$. D'autre part, le point d'intersection de Θ avec une autre composante de Z_k est un point d'épaisseur 1 ([Liu2], lemme 4). Donc si l'on désigne par $\phi_1 : Y_1 \rightarrow W$ le morphisme construit au §6.3 relatif au point p_1 avec $r = 1$, alors Y_1 est isomorphe à $\widetilde{W}$ dans un voisinage du transformé strict de W_k . Il suit que $\lambda(p_1)$ est pair et que $\delta(p_1) = \lambda(p_1) - 1$ (lemme 8 (a) et (d)). Par conséquent $\lambda(p_1) + \lambda(p_2) = 2g + 4$. Compte tenu du fait que $\lambda(p_i)$ est pair, on a alors $\max\{\lambda(p_1), \lambda(p_2)\} \geq 2[(g + 1)/2] + 2$. Il résulte de la prop. 2 que W n'est pas minimal.

Supposons que l'on est dans le cas (iii). Le diviseur Γ est de multiplicité 2 et rencontre une unique composante (de multiplicité 2) en un seul point. Donc W contient un unique point singulier p_0 et W_k n'est pas réduit. On a $\delta(p_0) = 2g + 2$

comme ci-dessus. Les composantes Θ et Θ' se coupe transversalement en un point régulier z_0 de Z ([Liu2], lemme 4). Soit $\phi_2 : Y_2 \rightarrow W$ le morphisme construit au §6.3 relatif à p_0 avec $r = 2$. Alors Y_2 est isomorphe à $\widetilde{W}$ dans un voisinage du transformé strict de W_k . Il suit que $\lambda_2(p_0) = \delta(p_0) + 2 = 2g + 4$ (lemme 8 (d)). Or $\lambda(p_0) \geq \lambda_2(p_0)/2 = g + 2$ (lemme 7 (e)), il suit de la prop. 3 que g est impair. D'où contradiction. $\square$

Remarque 16. On a montré en même temps que si W est un modèle de Weierstrass de C avec W_k réduit (W non nécessairement minimal), et si pour tout point $p_0 \in W_k$ on a $\max\{\lambda(p_0), \lambda'(p_0)\} \leq 2g + 1$, alors $\widetilde{W} \simeq X$.

Corollaire 4. *Il n'existe (à isomorphisme près) qu'un nombre fini de modèles de Weierstrass minimaux de C .*

Preuve. Supposons que C admette un modèle de Weierstrass minimal W qui vérifie la condition de la prop. 5. Si g est pair, alors W est l'unique modèle de Weierstrass minimal d'après le corollaire 2 (b) car W n'a pas de point singulier rationnel sur k . Le cas g impair résulte de la prop. 5 (b).

Dans les autres cas, pour tout modèle de Weierstrass minimal, on a $X \simeq \widetilde{W}$. Chaque modèle minimal W donne donc naissance à une ou deux composantes irréductibles de X_k (il s'agit des transformés stricts par $X \simeq \widetilde{W} \rightarrow W$ des composantes irréductibles de W_k). Ces composantes irréductibles sont distinctes pour des modèles W non isomorphes. Le corollaire résulte de la finitude des composantes irréductibles de X_k . $\square$

Remarque 17. Si le corps résiduel k est fini, alors pour tout entier d , il n'existe qu'un nombre fini de modèles de Weierstrass W de C de discriminant $\nu(\Delta_W) = d$. Mais cela est faux dès que k est infini.

Définition 14. Soit Y un modèle de C sur $\mathcal{O}_K$ (voir §4), soit $P_0 \in C(K)$. Comme Y est propre sur $\mathcal{O}_K$, la section $P_0 : \text{Spec } K \rightarrow C$ s'étend en une section $\text{Spec } \mathcal{O}_K \rightarrow Y$. On appelle *spécialisation de P_0 dans Y_k* l'image par cette section du point fermé de $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ dans Y_k . C'est aussi le point d'intersection $\overline{\{P_0\}} \cap Y_k$. Si ce point est régulier dans Y , il est alors lisse sur k .

Corollaire 5. *Soit X le modèle régulier minimal de C sur $\mathcal{O}_K$. Supposons $C(K) \neq \emptyset$. Alors on a les propriétés suivantes :*

- (a) *Pour tout modèle de Weierstrass minimal W de C , on a $\widetilde{W} \simeq X$.*
- (b) *Pour tout point $P_0 \in C(K)$, il existe un unique modèle de Weierstrass W (non nécessairement minimal) tel que la spécialisation de P_0 dans W_k soit un point lisse et que $X \simeq \widetilde{W}$.*

Preuve. (a) Supposons que $\widetilde{W} \not\simeq X$. Comme X_k contient une composante irréductible de multiplicité 1, il suit des prop. 5 et 6 que g est pair et que W_k n'est pas réduit. Soient $P_0 \in C(K)$ et p_0 sa spécialisation dans W_k . Alors p_0 est un point singulier de W rationnel sur k . Or on a vu dans la preuve de la prop. 5 que W contient un unique point singulier et qu'il n'est pas rationnel sur k , d'où contradiction.

(b) Soit Γ une composante irréductible de X_k contenant la spécialisation de P_0 dans X_k . Alors Γ est de multiplicité 1 dans X_k . Soit Θ l'image de Γ dans $X/\langle\sigma\rangle$, alors il existe un unique modèle $\mathbb{P}_x^1$ de $\mathbb{P}_K^1$ birationnel à $X/\langle\sigma\rangle$ dans un voisinage

du point générique de Θ . La normalisation de $\mathbb{P}_x^1$ dans C est l'unique modèle de Weierstrass répondant à la question. $\square$

9. DISCRIMINANT ET MULTIPLICITÉ

Soit W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. Dans ce paragraphe, on donne une majoration des multiplicités $\lambda(p_0)$ par le discriminant $\nu(\Delta_W)$ (prop. 7). On en déduit notamment que si $\nu(\Delta_W) = 1$, alors W est régulier. On peut améliorer ces résultats lorsque $\text{car}(k) \neq 2$ (§9.2) grâce à la notion du discriminant local.

En fin du paragraphe, on décrit la désingularisation minimale de W en p_0 lorsque $\delta(p_0) \leq 2$. Cette condition implique que p_0 est une singularité de type A_n ou D_n (dans la classification des singularités rationnelles). La majoration ci-dessus implique que $n \leq \nu(\Delta_W)$.

9.1 Une majoration par le discriminant.

Considérons l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[u_i, v_j]_{0 \leq i \leq g+1, 0 \leq j \leq 2g+2}$. Soit Δ le discriminant de l'équation hyperelliptique

$$y^2 + (u_{g+1}x^{g+1} + \cdots + u_1x + u_0)y = v_{2g+2}x^{2g+2} + \cdots + v_1x + v_0$$

On sait que $\Delta \in \mathbb{Z}[u_i, v_j]_{i,j}$. Le lemme suivant précise un peu plus sa nature.

Lemme 12. *Soit $1 \leq n \leq 2g+2$, soit I_n l'idéal $(v_i, u_j u_l)_{0 \leq i \leq n, j+l \leq n}$ de $\mathbb{Z}[u_i, v_j]_{i,j}$. Alors on a*

$$\Delta \in (I_n)^n \cap (v_0, u_0^2, v_1^2, u_0 u_1 v_1) \cap (v_i, u_j u_l)_{i,j,l}^{4g+2}.$$

Preuve. Montrons que $\Delta \in (I_n)^n$. l'appartenance aux deux autres idéaux se démontrent de façon analogue. Il est clair que $\mathbb{Z}[u_i, v_j]/(I_n)^n$ est sans torsion sur $\mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer l'assertion dans $\mathbb{Q}[u_i, v_j]$. Soit

$$a_i = 4v_i + \sum_{j+l=i} u_j u_l.$$

Alors Δ est le discriminant de $\sum a_i x^i$ (à une puissance entière de 2 près), c'est aussi le discriminant $\text{disc}(\mathcal{P}(x))$ de $\mathcal{P}(x) := \sum a_i x^{2g+2-i}$. Soit J_n l'idéal $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{Q}[a_i]_{0 \leq i \leq 2g+2}$, il suffit de montrer que $\Delta \in (J_n)^n$. Or

$$\text{disc}(\mathcal{P}(x)) = a_0^{-1} \text{Res}(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}'(x)).$$

La propriété se voit alors en développant par rapport aux $n+1$ premières lignes du déterminant (qui donne le résultant) :

$$\begin{vmatrix} (2g+2)a_0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ (2g+1)a_1 & (2g+2)a_0 & 0 & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}. \quad \square$$

Soit $p_0 \in W_k$ un point rationnel sur k , soit W' un modèle de Weierstrass non isomorphe à W tel que $p_0 \in W' \wedge W$ (déf. 7). Considérons la suite de modèles de Weierstrass $W^0 = W, W^1, \dots, W^d = W'$ construit dans la preuve de la proposition 3, où $d = d(W, W')$. Notons p_i un point de $W^i \cap (W^i \wedge W^{i+1})$. Ce point est unique s'il est singulier dans W^i . Posons

$$\lambda(p_0, p_{d-1}) := \lambda(p_{d-1}) + \sum_{0 \leq i \leq d-2} 2[\lambda(p_i)/2].$$

Notons $\epsilon = 0$ si W_k est réduit et $\epsilon = 1$ sinon.

Lemme 13. *Avec les notations ci-dessus on a*

$$\min\{\lambda(p_0, p_{d-1}) + (4g + 1)\epsilon, 2\lambda(p_0, p_{d-1}) - 2d + 4g\epsilon\} \leq \nu(\Delta_W).$$

En particulier, si les p_i sont singuliers dans W^i , alors $2d \leq \nu(\Delta_W)$.

Preuve. On peut supposer que $W/\langle\sigma\rangle = \mathbb{P}_x^1$, $W'/\langle\sigma\rangle = \mathbb{P}_u^1$ et $x = t^d u$. Pour tout $i \leq d$, notons B^i la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K[x/t^{i-1}]$ dans $K(C)$ et

$$\lambda^i(\sum_j c_j x^j) = \min\{\nu(c_j) + ij \mid j \geq 0\}.$$

Pour toute base $\{1, y\}$ de $B := B^1$, on note $\lambda^i(y) = \min\{2\lambda^i(Q(x)), \lambda^i(P(x))\}$ et λ^i le maximum des $\lambda^i(y)$. On montre comme pour le lemme 7 (c) qu'il existe une base standard $\{1, y\}$ de B telle que $\lambda^i(y) = \lambda^i$ pour tout $1 \leq i \leq d$, et que si W_k n'est pas réduit alors $\tilde{Q}(x) = \tilde{P}(x) = 0$. Il est alors clair que $\lambda^i = \lambda(p_{i-1}) + 2[\lambda^{i-1}/2]$ pour tout $i \geq 2$. Donc $\lambda^d = \lambda(p_0, p_{d-1})$.

D'autre part, si on écrit $Q(x) = \sum_i b_i x^i$ et $P(x) = \sum_j a_j x^j$ (pour une base standard $\{1, y\}$ choisie comme ci-dessus), alors $2\nu(b_j), \nu(a_j) \geq \lambda^d - jd$ par définition. Or d'après le lemme 12, le discriminant de l'équation $y^2 + Q(x)y = P(x)$ appartient à $(a_0, a_1^2, b_0^2, a_1 b_0 b_1)\mathbb{Z}[a_i, b_j]$. De plus, si l'on affecte les a_i de degré 1 et les b_j de degré $1/2$, alors Δ est homogène de degré $4g + 2$. Cela donne l'inégalité

$$\nu(\Delta_W) \geq \min\{\lambda^d + (4g + 1)\epsilon, 2(\lambda^d - d) + 4g\epsilon\}.$$

D'où le lemme. □

Proposition 7. *Soient W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$ et p_0 un point singulier de W . Posons $\epsilon = 0$ si W_k est réduit et $\epsilon = 1$ sinon.*

- (a) *Si $\nu(\Delta_W) \leq 4g + 1$, alors W_k est réduit, et W est l'unique modèle de Weierstrass minimal de C .*
- (b) *On a $\nu(\Delta_W) \geq \lambda(p_0) + 4g\epsilon$, et $\nu(\Delta_W) \geq \delta(p_0) - 1$.*

Preuve. (a) Le fait que W_k soit réduit est une conséquence immédiate du lemme 12. De plus, pour tout modèle de Weierstrass W' de C , la différence $\nu(\Delta_{W'}) - \nu(\Delta_W)$ est un multiple de $4g + 2$ (voir §2). D'où le résultat.

(b) Quitte à faire un changement de base étale (voir §8), on peut supposer que p_0 est rationnel sur k . Alors la première inégalité résulte du lemme 13 en prenant $W' = W(p_0)$ (déf. 12), et donc $d = d(W', W) = 1$, $\lambda(p_0, p_{d-1}) = \lambda(p_0)$.

Soit $y^2 + Q(x)y = P(x)$ une équation entière associée à W telle que $x(p_0) = 0$, $\lambda(p_0, y) = \lambda(p_0)$, $\delta(p_0, y) = \delta(p_0)$. Écrivons $Q(x) = \sum_i b_i x^i$, $P(x) = \sum_i a_i x^i$. Alors par définition $\nu(a_i) \geq 1$ si $i \leq \delta(p_0) - 1$ et $\nu(b_j) \geq 1$ si $j \leq \delta(p_0)/2 - 1$. Donc d'après le lemme 12 (avec $n = \delta(p_0) - 1$), on a $\nu(\Delta_W) \geq \delta(p_0) - 1$. □

Corollaire 6. *Soit W un modèle de Weierstrass de C . Si $\nu(\Delta_W) = 1$, alors W est régulier.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la prop. 7 (b). □

Remarque 18. Gardons l'hypothèse du corollaire 6. Alors W_k est réduit et n'admet que des points doubles ordinaires comme singularité en vertu de la prop. 7. Si $\text{car}(k) \neq 2$, on voit en utilisant le corollaire 7 ci-après que W_k est intègre et que W_k n'admet qu'un point singulier qui est de plus rationnel sur k .

Cela est encore vrai si $\text{car}(k) = 2$ et si C est elliptique ou de genre $g = 2$ (utiliser la formule d'Ogg si C est elliptique et [Liu2], théorèmes 1 et 2 si $g = 2$). Si $g \geq 3$, cet énoncé est certainement valable encore, mais nécessiterait une étude plus poussée.

9.2 Facteurs locaux du discriminant.

On suppose dans cette section que $\text{car}(k) \neq 2$. Soit W un modèle de Weierstrass de C . A chaque point $p \in W_k$, on va associer un discriminant $\nu(\Delta_{W,p})$ de sorte que l'on retrouve $\nu(\Delta_W)$ par une sommation sur les $\nu(\Delta_{W,p})$. Soit $p_0 \in W_k$ tel que $\delta(p_0) \geq 1$. Soit $x \in K(C)^{(\sigma)}$ tel que $W/\langle \sigma \rangle = \mathbb{P}_x^1$ et que x ne soit pas un pôle de p_0 . On peut donc écrire une équation affine $y^2 = P(x)$ de W . Soit ϵ comme dans la prop. 7. Posons $H(x) = t^{-\epsilon}P(x)$. On peut décomposer l'image $\tilde{H}(x)$ de $H(x)$ dans $k[x]$: $\tilde{H}(x) = s_0(x)^{\delta(p_0)}r(x)$ avec $s_0(x)$ unitaire, irréductible et s'annulant en p_0 , $r(x)$ premier à $s_0(x)$. Soit $\mathcal{O}_K^h$ l'hensélisé de $\mathcal{O}_K$. Alors on a une unique décomposition dans $\mathcal{O}_K^h$: $H(x) = H_0(x)R(x)$, avec $H_0(x), R(x) \in \mathcal{O}_K^h[x]$, $H_0(x)$ unitaire, $\tilde{H}_0(x) = s_0(x)^{\delta(p_0)}$ et $\tilde{R}(x) = r(x)$.

On note encore par ν l'unique prolongement de ν sur l'hensélisé K^h de K .

Définition 15. Avec les notations ci-dessus, on appelle *facteur local du discriminant* $\nu(\Delta_W)$ en p_0 la valuation du discriminant de l'équation hyperelliptique $y_0^2 = t^\epsilon H_0(x)$ (voir §2). On le note $\nu(\Delta_{W,p_0})$.

On note C_{p_0} la courbe hyperelliptique sur K^h définie par l'équation $y_0^2 = t^\epsilon H_0(x)$, et W_{p_0} le modèle de Weierstrass de C_{p_0} sur $\mathcal{O}_K^h$ associé à cette équation.

Lemme 14. Avec les notations ci-dessus, on a les propriétés suivantes :

- (a) Il existe un unique point singulier q_0 dans $W' := W_{p_0}$, et après une extension étale de $\mathcal{O}_K$, on a un isomorphisme des complétés formels relatifs aux idéaux maximaux

$$\hat{\mathcal{O}}_{W,p_0} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{W',q_0}.$$

- (b) On a $\delta(q_0) = \delta(p_0)$ et $\lambda(q_0) = \lambda(p_0)$.
(c) Soit ϵ comme dans la prop. 7. On a

$$\nu(\Delta_W) - (4g + 2)\epsilon = \sum_{\delta(p) \geq 1} (\nu(\Delta_{W,p}) - (4[(\delta(p) - 1)/2] + 2)\epsilon)[k(p) : k].$$

Preuve. (a) Soit q_0 le point de W' correspondant à $s_0(x) = t = 0$. Alors par construction, $\delta(q_0) = \delta(p_0) = (\deg \tilde{H}_0(x))/[k(p_0) : k]$. C'est donc l'unique point singulier de W' . D'autre part, après extension étale de $\mathcal{O}_K$, l'image dans $k[x]$ du polynôme noté $R(x)$ plus haut est le carré d'un élément non nul, donc $R(x)$ est un carré dans le complété formel $\hat{\mathcal{O}}_{W,p_0}$, ce qui implique l'isomorphisme souhaité.

(b) L'entier $\lambda(p_0)$ est la multiplicité en p_0 du diviseur de ramification de $W \rightarrow W/\langle \sigma \rangle$, il ne dépend donc que de l'anneau local complété $\hat{\mathcal{O}}_{W,p_0}$. D'où $\lambda(p_0) = \lambda(q_0)$. Cela peut se voir directement par la définition aussi.

(c) Quitte à faire un changement de base étale, on peut choisir $x \in K(C)^{(\sigma)}$ de sorte que $W/\langle \sigma \rangle = \mathbb{P}_x^1$ et que le diviseur des pôles de x soit contenu dans le lieu régulier de W_k . Soit $y^2 = P(x)$ l'équation de W associé à x . L'égalité sur $\nu(\Delta_W)$ résulte de l'expression du discriminant en fonction des différences des zéros de $P(x)$ dans une clôture algébrique de K . Notons que par définition $\nu(\Delta_{W,p_0}) = \nu(\text{disc}(H_0)) + (4[(\delta(p_0) - 1)/2] + 2)\epsilon$, et que les deux membres de l'égalité à démontrer ne changent pas après extension étale de $\mathcal{O}_K$. $\square$

Corollaire 7. *Supposons $\text{car}(k) \neq 2$. Soit W un modèle de Weierstrass de C tel que W_k soit réduit. Alors on a*

$$\nu(\Delta_W) \geq \sum_{p \in W_k, \lambda(p) \geq 2} \lambda(p)[k(p) : k].$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate du lemme 14 (c) et de la prop. 7 (b). $\square$

Remarque 19. Nous ne savons pas si la construction du facteur local $\Delta_{W,p}$ peut encore se faire lorsque $\text{car}(k) = 2$. Cependant, l'inégalité ci-dessus peut être encore valable.

9.3 La désingularisation de W dans quelques cas simples.

Soit W un modèle de Weierstrass de C et $p_0 \in W_k$ un point singulier de W . Nous décrivons dans ce qui suit le processus de désingularisation de W en p_0 dans quelques cas simples. On suppose p_0 rationnel sur k pour simplifier.

(9.3.1) Supposons $\delta(p_0) = 1$. Alors W_k est non réduit et $\lambda(p_0) = 2$. De plus, $\lambda_2(p_0) = 3$, $\lambda'(p_0) \leq 1$ (lemme 7 (e), lemme 9 (c)). Donc l'éclatement $Y_1 \rightarrow W$ de centre p_0 désingularise p_0 , l'image réciproque Γ de p_0 dans Y_1 est isomorphe à $\mathbb{P}_k^1$ et est de multiplicité 1. De plus Γ intersecte le transformé strict $\widetilde{W}_k$ transversalement (utiliser la formule de projection comme dans la preuve de la prop. 5).

(9.3.2) Supposons $\delta(p_0) = 2$ et W_k réduit. Alors p_0 est un point double ordinaire. L'image réciproque de p_0 par $\widetilde{W} \rightarrow W$ est donc une chaîne de n droites projectives sur k . Le point p_0 est une singularité de type A_n dans W . L'entier $n + 1$ est l'épaisseur du point double ordinaire p_0 dans W . On peut déterminer n par l'algorithme qui suit.

Comme p_0 est singulier par hypothèse, on a $\lambda(p_0) = 2$ d'après le lemme 7 (e). Soit $W^1 = W(p_0)$ le modèle de Weierstrass associé au point p_0 (voir déf. 12). Alors W_k^1 est réduit, et d'après le lemme 9 (d), W^1 admet au plus un point singulier p_1 qui est alors rationnel sur k et on a $\delta(p_1) = 2$. Si $\lambda(p_1) \leq 1$, on pose $m = 1$ et l'algorithme est fini. Sinon, on considère $W^2 := W(p_1)$ et on continue ainsi de suite. Lorsque $\lambda(p_m) \leq 1$, l'algorithme s'arrête. Si W_k^m est irréductible, alors $n = 2m - 1$, sinon $n = 2m$.

D'après le lemme 13 (appliqué à la suite $W, W^1, \dots, W^m$), on a $n \leq \nu(\Delta_W)$ car $\lambda(p_0, p_{m-1}) = 2m$.

(9.3.3) Supposons $\delta(p_0) = 2$ et W_k est non réduit. Alors $\lambda(p_0) \leq 3$.

Si $\lambda(p_0) = 2$, alors $\lambda'(p_0) \leq 1$. On peut résoudre "à la main" la singularité p_0 . On trouve la figure 1.



FIGURE 1

Les composantes irréductibles de l'image réciproque de p_0 sont des coniques lisses sur k .

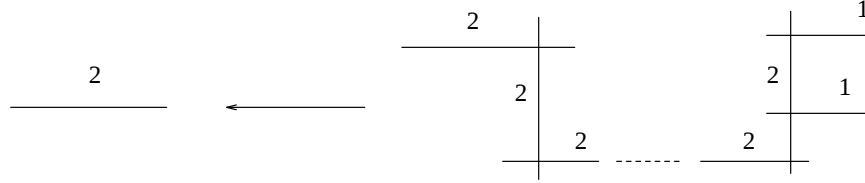


FIGURE 2

Supposons maintenant $\lambda(p_0) = 3$. On va construire une certaine suite de modèles de Weierstrass $W, W^1, \dots, W^m$. Posons $W^1 = W(p_0)$ (déf. 12). Alors W_k^1 n'est pas réduit, $\lambda'(p_0) \leq 3$ et on a

$$\sum_{p \in W_k^1 \setminus (W^1 \wedge W)} \delta(p)[k(p) : k] = 2$$

(lemme 9). Si $\lambda'(p_0) \leq 2$, on s'arrête. Sinon, soit p_1 l'unique point de $W_k^1 \setminus (W^1 \wedge W)$ tel que $\lambda(p_1) = 3$. Alors $\delta(p_1) = 2$, $p_1 \in W_k^1(k)$. On continue alors la construction. On s'arrête à $W^m = W^{m-1}(p_{m-1})$ lorsque $\lambda'(p_m) = 2$ (et $\lambda(p_m) = 3$). Cette suite s'arrête nécessairement car le lemme 13 donne la majoration $2m + 3 \leq \nu(\Delta_W)$. Soient $W^{m+1} = W^m(p_m)$, $\delta'(p_m) = \max\{\delta(p) \mid p \in W_k^{m+1}, p \notin W^m \wedge W^{m+1}\}$.

Un raisonnement analogue à ceux qui précèdent montre que la désingularisation minimale $\phi : \widetilde{W} \rightarrow W$ de W en p_0 est de la forme figure 2 (après éventuellement une extension quadratique de k) où les composantes irréductibles de $\phi^{-1}(p_0)$ sont des $\mathbb{P}^1$ (sur une clôture algébrique $\bar{k}$ de k), leur nombre n (sur $\bar{k}$) est déterminé par $n = 2m + 3$ si $\delta'(p_m) = 1$ et $n = 2m + 4$ sinon. On a ici une singularité de type D_n , avec $n \leq \nu(\Delta_W)$. Les discussions ci-dessus permettent d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 8. *Soit W un modèle de Weierstrass de C , soit p_0 un point de $W_k(k)$ tel que $\delta(p_0) \leq 2$. Alors p_0 est une singularité rationnelle de type A_n ou D_n , avec $n \leq \nu(\Delta_W)$.*

10. APPLICATIONS AUX COURBES ELLIPTIQUES

On s'intéresse dans ce paragraphe au cas des courbes elliptiques, et plus particulièrement à l'algorithme de Tate qui détermine la réduction du modèle régulier minimal. Les résultats sont essentiellement bien connus. Mais nos démonstrations permettent d'illustrer la théorie générale développée dans les paragraphes précédents.

On suppose dans tout ce paragraphe que $g = 1$, $C(K) \neq \emptyset$. On fixera un point $o \in C(K)$ et une involution hyperelliptique σ de C telle que $\sigma(o) = o$. Sauf mention expresse du contraire, les modèles de Weierstrass considérés sont relatifs à σ . Lorsque l'on considère C comme une courbe elliptique, l'élément neutre sera sous-entendu o . On note X le modèle régulier minimal de C sur $\mathcal{O}_K$.

10.1 Modèles de Weierstrass minimaux.

Considérons le modèle de Weierstrass minimal W_0 de (C, o) sur $\mathcal{O}_K$. Par définition, c'est un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$ tel que la spécialisation de o dans $(W_0)_k$ soit un point lisse sur k et que $\nu(\Delta_W)$ soit minimal pour cette propriété. Il est bien connu que ce modèle est unique à isomorphisme près.

Le fait que la spécialisation de o dans $(W_0)_k$ soit lisse peut se traduire de la façon suivante : W_0 est associé à une équation entière (déf. 2)

$$(*) \quad y^2 + (a_1x + a_3)y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

et o est le pôle de x .

Définition 16. Soit W un modèle de Weierstrass de (C, σ) sur $\mathcal{O}_K$. Soit

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

une équation entière de C associée à W . On appelle *différentielle canonique de W* la forme différentielle

$$\omega(W) := dx/(2y + Q(x)).$$

On vérifie aisément que modulo $\mathcal{O}_K^*$, $\omega(W)$ est indépendant du choix de x et de y .

Soit $\omega_{W/\mathcal{O}_K}$ le faisceau dualisant relatif de W sur $\mathcal{O}_K$. On a canoniquement $\omega_{W/\mathcal{O}_K} = \omega(W)\mathcal{O}_W$ (utiliser par exemple [Liu2], lemme 2).

Proposition 8. Soit (C, o) une courbe elliptique sur K . Soient X son modèle régulier minimal sur $\mathcal{O}_K$ et W un modèle de Weierstrass de C sur $\mathcal{O}_K$. On a les propriétés suivantes :

- (a) Soit $\widetilde{W} \rightarrow W$ la désingularisation minimale de W . Si $\widetilde{W} \simeq X$, alors le faisceau dualisant relatif $\omega_{X/\mathcal{O}_K}$ vérifie $\omega_{X/\mathcal{O}_K} = \omega(W)\mathcal{O}_X$. En particulier, $H^0(X, \omega_X) = \omega(W)\mathcal{O}_K$.
- (b) On a $\widetilde{W} \simeq X$ si et seulement si W est minimal.
- (c) Le modèle de Weierstrass minimal W_0 de (C, o) est un modèle de Weierstrass minimal de C en tant que courbe hyperelliptique. En particulier, le discriminant minimal de la courbe elliptique (C, o) coïncide avec le discriminant minimal de (C, σ) .

Preuve. (a) Soit $\pi : X \rightarrow W$ le morphisme canonique. Par la théorie d'intersection sur X , pour toute composante irréductible Γ de X_k , distincte du transformé strict de W_k , on a $\omega_X \cdot \Gamma = 0$. Il suit que $\omega_X = \pi^*\omega_W = \omega(W)\mathcal{O}_X$ ([Lip], Theorem 27.1) et donc $H^0(X, \omega_X) = \omega(W)\mathcal{O}_K$.

(b) Si W est minimal, on a $\widetilde{W} \simeq X$ en vertu du corollaire 5 (a). Inversement supposons que $\widetilde{W} \simeq X$. Soit $(\mathcal{E}')$ (resp. $(\mathcal{E})$) une équation entière associée à un modèle de Weierstrass minimal W' de C (resp. à W). En vertu de (a), on a $\omega(W)\mathcal{O}_K^* = \omega(W')\mathcal{O}_K^*$. Or on peut vérifier à l'aide de la formule en fin du §2 que

$$\Delta(\mathcal{E}') \cdot \omega(W')^{\otimes 12} = \Delta(\mathcal{E}) \cdot \omega(W)^{\otimes 12} \in H^0(C, \Omega_{C/K}^1)^{\otimes 12}.$$

Par conséquent, $\nu(\Delta_W) = \nu(\Delta_{W'})$ et W est minimal.

(c) Soit W l'unique modèle de Weierstrass de C tel que $\widetilde{W} \simeq X$ et que la spécialisation de o dans W_k soit lisse (corollaire 5 (b)). D'après (b), W est minimal. Donc $W \simeq W_0$. $\square$

Remarque 20. La désingularisation minimale $\widetilde{W}_0$ de W_0 est isomorphe à X d'après la prop. ci-dessus (b) et (c). Cela résulte aussi implicitement de l'algorithme de Tate ([Sil], IV.9.1).

Remarque 21. Soient τ une involution hyperelliptique de C et W_τ un modèle de Weierstrass minimal de (C, τ) . La même preuve que ci-dessus montre que l'on a

type de X	$X_{\bar{k}}$	$(X/\langle\sigma\rangle)_k$
II*		
III*		
IV*		

TABLEAU 1

$H^0(X, \omega_X) = \omega(W_\tau)\mathcal{O}_K$. Donc $\nu(\Delta_{W_\tau}) = \nu(\Delta_{W_\sigma})$. On voit donc que le discriminant minimal est indépendant du choix d'une involution hyperelliptique lorsque $C(K) \neq \emptyset$, ou mieux si C a un point rationnel dans le hensélisé strict K^{sh} de K (prop. 4).

Prenons pour un instant une courbe hyperelliptique C de genre 1 telle que $C(K^{\text{sh}}) = \emptyset$. Soient τ une involution hyperelliptique de C et W_τ un modèle de Weierstrass minimal de C relatif à τ . Alors $H^0(X, \omega_X) \neq \omega(W_\tau)\mathcal{O}_K$. Si $\text{car}(k) \neq 2$, en utilisant la remarque 15 on voit que $t^{-1}\omega(W_\tau)$ est une base de $H^0(X, \omega_X)$. On a donc encore l'indépendance du discriminant minimal vis-à-vis du choix d'une involution hyperelliptique. Par contre, si $\text{car}(k) = 2$, nous ne savons pas si ce résultat subsiste.

10.2 Action de l'involution sur le modèle régulier minimal.

Soit (C, o) une courbe elliptique. Rappelons que l'involution σ laisse invariant o par hypothèse. Soit X le modèle régulier minimal de C sur $\mathcal{O}_K$. On souhaite étudier le schéma quotient $X/\langle\sigma\rangle$. D'après le corollaire 5, il y a bijection entre les modèles de Weierstrass minimaux de C et les composantes de multiplicité 1 de $(X/\langle\sigma\rangle)_k$.

Les cas qui nous intéressent dans la suite sont les types II*, III* et IV*. En utilisant [Liu2], lemme 4, on obtient le tableau 1 où Γ_0 est la composante irréductible de X_k qui contient la spécialisation de l'élément neutre o .

On note d'après le tableau que si X est de type III*, alors C admet exactement quatre modèles de Weierstrass minimaux. S'il est de type II* ou IV*, alors C admet exactement trois modèles de Weierstrass minimaux. De plus le type II* est caractérisé par le fait que deux de ces modèles de Weierstrass sont à fibre spéciale non réduite.

10.3 Algorithme de Tate.

Dans cette section on souhaite déterminer le type de Kodaira-Néron de la fibre spéciale X_k . Plus précisément, soit W le modèle de Weierstrass minimal de (C, o) , on va examiner le processus de désingularisation $X \rightarrow W$ connu sous le nom de l'algorithme de Tate ([Tat], §6-8). Cette désingularisation avait été décrite en détail par Néron ([Nér], chap. III, §10-15). La preuve complète de [Tat] se trouve aussi dans [Sil], IV.9.

La théorie d'intersection sur X permet de trouver *a priori* toutes les configurations possibles de X_k ([Des], §4.7, [Kod], Theorem 6.2, ou [Sil], IV). Cela plus la connaissance de l'action de σ sur X (voir §10.2) nous permettent parfois de trouver le type de X sans désingulariser W jusqu'au bout. La fibre spéciale W_k est intègre. Soit e_0 la spécialisation de l'élément neutre o dans W_k , alors $\delta(e_0) = \lambda(e_0) = 1$ car $\sigma(o) = o$. Donc W_k admet au plus un point singulier p_0 , et on a $\delta(p_0), \lambda(p_0) \leq 3$ (appliquer les lemmes 6 et 7). Pour la commodité du lecteur, nous suivons la numérotation de Tate [Tat] des différentes étapes de la désingularisation. La fin de chaque étape est marquée par un signe. $\square$

(1) *Supposons que $\nu(\Delta_W) = 0$.* Donc W_k est lisse (ce qui équivaut à $\delta(p) \leq 1$ pour tout $p \in W_k$). Alors $X = W$ est de type I_0 . $\square$

(2) *Supposons $\max\{\delta(p) \mid p \in W_k\} = 2$.* Alors W_k est une courbe singulière semi-stable, et X est de type I_n , où $n = \nu(\Delta_W) \geq 1$.

Notons qu'inversement, si X est de type I_n , $n \geq 0$, alors W_k est nécessairement semi-stable, donc $\delta(p) \leq 2$ pour tout point $p \in W_k$. Supposons à partir de maintenant que

$$\exists p_0 \in W_k, \quad \text{tel que} \quad \delta(p_0) = 3$$

Il suit que $p_0 \in W_k(k)$ (lemme 6 (d)-(e)). $\square$

(3) *Supposons $\lambda(p_0) = 1$,* alors W est régulier, donc $X = W$ est de type II. $\square$

Supposons à partir de maintenant que

$$\lambda(p_0) \geq 2 \quad (\text{et} \quad \delta(p_0) = 3)$$

Soit $Y_1 \rightarrow W$ le morphisme construit dans §6.3. C'est aussi l'éclatement de W de centre p_0 . Comme $\lambda_2(p_0) \leq \delta(p_0)$, on a $[\lambda(p_0)/2] = [\lambda_2(p_0)/2] = 1$. Donc Y_1 est régulier dans un voisinage du transformé strict de W_k (lemme 8 (c)).

On note $W^1 = W(p_0)$ le modèle de Weierstrass de C associé à p_0 (voir déf. 12). Considérons le point

$$p'_0 \in W^1 \cap (W^1 \wedge W)$$

On a $\lambda(p'_0) = 2$ en vertu du lemme 9 (b).

(4-5) *Supposons $\lambda(p_0) = 2$,* alors X est de type III ou IV.

En effet, il suffit de montrer que Y_1 est régulier. Ce qui équivaut à $\lambda'(p_0) \leq 1$. On a $\delta(p'_0) \geq \lambda(p'_0) = 2$. Comme W_k^1 n'a pas de point double car X serait de type I_n , on a $\delta(p'_0) \geq 3$. Donc W_k^1 est lisse en dehors de p'_0 (lemme 6 (f)). D'où $\lambda'(p_0) \leq 1$.

Notons que d'après le lemme 9 (d), l'image réciproque de p_0 dans Y_1 est une conique sur k . Il est aisé de voir ([Tat], §7) que cette conique est géométriquement irréductible (donc $X = Y_1$ est de type III) si et seulement si l'invariant b_8 vérifie $\nu(b_8) = 2$. $\square$

D'ici jusqu'à la fin de la section, on supposera que

$$\delta(p_0) = \lambda(p_0) = 3.$$

Comme $\lambda(p_0)$ est impair, d'après le lemme 9 (d) on a

$$(**) \quad \sum_{p \in W_k^1, p \neq p'_0} \delta(p)[k(p) : k] = 3.$$

(6-7) *Supposons qu'il existe $q \in W_k^1 \setminus \{p'_0\}$ tel que $\delta(q) = 1$. Alors X est de type I_n^* , $n \geq 0$.*

En effet, on a $\lambda(q) = 2$, et donc l'image réciproque de q dans la désingularisation minimale de W^1 est une composante $\simeq \mathbb{P}_k^1$ de multiplicité 1 (voir 9.3.1). D'autre part, W^1 a au moins trois points singuliers, donc X domine Y_1' (on peut aussi utiliser le corollaire 5). Il suit que X est de type I_n^* en considérant la liste de toutes les configurations possibles de X_k . Si $\delta(p) \leq 1$ pour tout $p \neq p'_0$, alors $n = 0$. Sinon, il existe un unique point $p_1 \in W_k^1(k)$ tel que $\delta(p_1) = 2$ d'après l'égalité (**) ci-dessus. L'algorithme décrit dans 9.3.3 permet de déterminer l'entier n . $\square$

Il reste le cas où il existe $p_1 \in W_k^1 \setminus \{p'_0\}$ avec $\delta(p_1) = 3$. Alors W^1 n'a que deux points singuliers p'_0 et p_1 . Il suit que X est de type II^* , III^* ou IV^* .

(8) *Supposons $\lambda(p_1) = 2$, alors X est de type IV^* . En effet, on a $\lambda'(p_1) = 1$. Donc C admet exactement trois modèles de Weierstrass minimaux qui sont W , W^1 et $W^2 := W^1(p_1)$, et W_k, W_k^2 sont réduits. On conclut grâce à §10.2.* $\square$

(9) *Supposons $\lambda(p_1) = 3$ et $\lambda'(p_1) \geq 2$, alors X est de type III^* . En effet, C admet alors au moins quatre modèles de Weierstrass minimaux.* $\square$

(10) *Supposons $\lambda(p_1) = 3$ et $\lambda'(p_1) = 1$, alors X est de type II^* . Cela se voit comme dans (8) ci-dessus en notant que les modèles de Weierstrass minimaux de C sont W , W^1 et $W^2 := W^1(p_1)$ et que W_k^2 n'est pas réduit.* $\square$

Remarque 22. La désingularisation de p_0 décrite dans cette section s'applique plus généralement à un point singulier p_0 d'un modèle de Weierstrass W d'une courbe hyperelliptique de genre ≥ 1 , tel que $\delta(p_0), \lambda(p_0), \lambda'(p_0) \leq 3$. En effet la désingularisation d'un point est une question locale.

RÉFÉRENCES

- [Art] M. Artin, *Lipman's proof of resolution of singularities for surfaces*, Arithmetic geometry (Cornell and Silverman, eds.), Springer-Verlag, 1986, pp. 267–287. MR **86**:1980
- [Chi] T. Chinburg, *Minimal models for curves over Dedekind rings*, Arithmetic geometry (Cornell and Silverman, eds.), Springer-Verlag, 1986, pp. 309–326. MR **86**:1982
- [Des] M. Deschamps, *Réduction semi-stable*, Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, Astérisque, vol. **86**, 1981, pp. 1–34.
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, 1977. MR **57**:3116
- [Kau] I. Kausz, *Eine Abschätzung der Selbstschnittzahl des kanonischen Divisors auf arithmetischen Flächen mit hyperelliptischer generischer Faser*, Dissertation, Köln (1995).
- [Kod] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces, II*, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626. MR **89m**:11059
- [Lan] S. Lang, *Introduction to Arakelov Theory*, Springer-Verlag, 1988.
- [Lic1] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over p -adic fields*, Invent. Math. **7** (1969), 120–136. MR **39**:4158
- [Lic2] S. Lichtenbaum, *Curves over discrete valuation rings*, Amer. J. Math. **90** (1968), 380–405. MR **37**:6284
- [Lip] J. Lipman, *Rational singularities*, Publ. Math. **36** (1969), 195–279. MR **43**:1986
- [Liu1] Q. Liu, *Modèles minimaux des courbes de genre deux*, J. Reine Angew. Math. **453** (1994), 137–164. MR **95k**:14024

- [Liu2] Q. Liu, *Conducteur et discriminant minimal de courbes de genre 2*, Compositio Math. **94** (1994), 51–79. MR **96b**:14038
- [Loc] P. Lockhart, *On the discriminant of hyperelliptic curve*, Trans. Amer. Math.Soc. **342** (1994), 729–752. MR **94f**:11054
- [Mat] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, second edition, Benjamin/Cummings, New York, 1980. MR **82i**:13003
- [Mil1] J. S. Milne, *Jacobian varieties*, Arithmetic geometry (Cornell & Silverman,eds.), Springer-Verlag, 1986, pp. 167–212. MR **86**:1976
- [Mil2] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1980. MR **81j**:14002
- [N-U] Y. Namikawa, K. Ueno, *The complete classification of fibers in pencils of curves of genus two*, Manuscripta Math. **9** (1973), 143–186. MR **51**:5595
- [Nér] A. Néron, *Modèles minimaux de variétés abélienne*, Publ. Math. IHES **21** (1964). MR **31**:3423
- [Ogg] A. P. Ogg, *On pencils of curves of genus two*, Topology **5** (1966), 355–362. MR **34**:3423
- [Sai] T. Saito, *Conductor, discriminant, and the Noether formula of arithmetic surfaces*, Duke Math. Jour. **57** (1988), 151–173. MR **89f**:14024
- [Sil] J. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Math., **151**, Springer-Verlag, 1994. MR **96b**:11074
- [Tat] J. Tate, *Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil*, Lect. Notes in Math., vol. **476**, Springer Verlag, 1975, pp. 33–52. MR **52**:13850
- [Uen] K. Ueno, *Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces*, Algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Masayaoshi Nagata, vol. **II** (1987), 749–770. MR **90a**:14040
- [Vie] E. Viehweg, *Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven*, J. Reine Angew. Math. **293** (1977), 284–308. MR 16655

CNRS, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES, UNIVERSITÉ BORDEAUX I, 351, COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE CEDEX, FRANCE

E-mail address: liu@math.u-bordeaux.fr